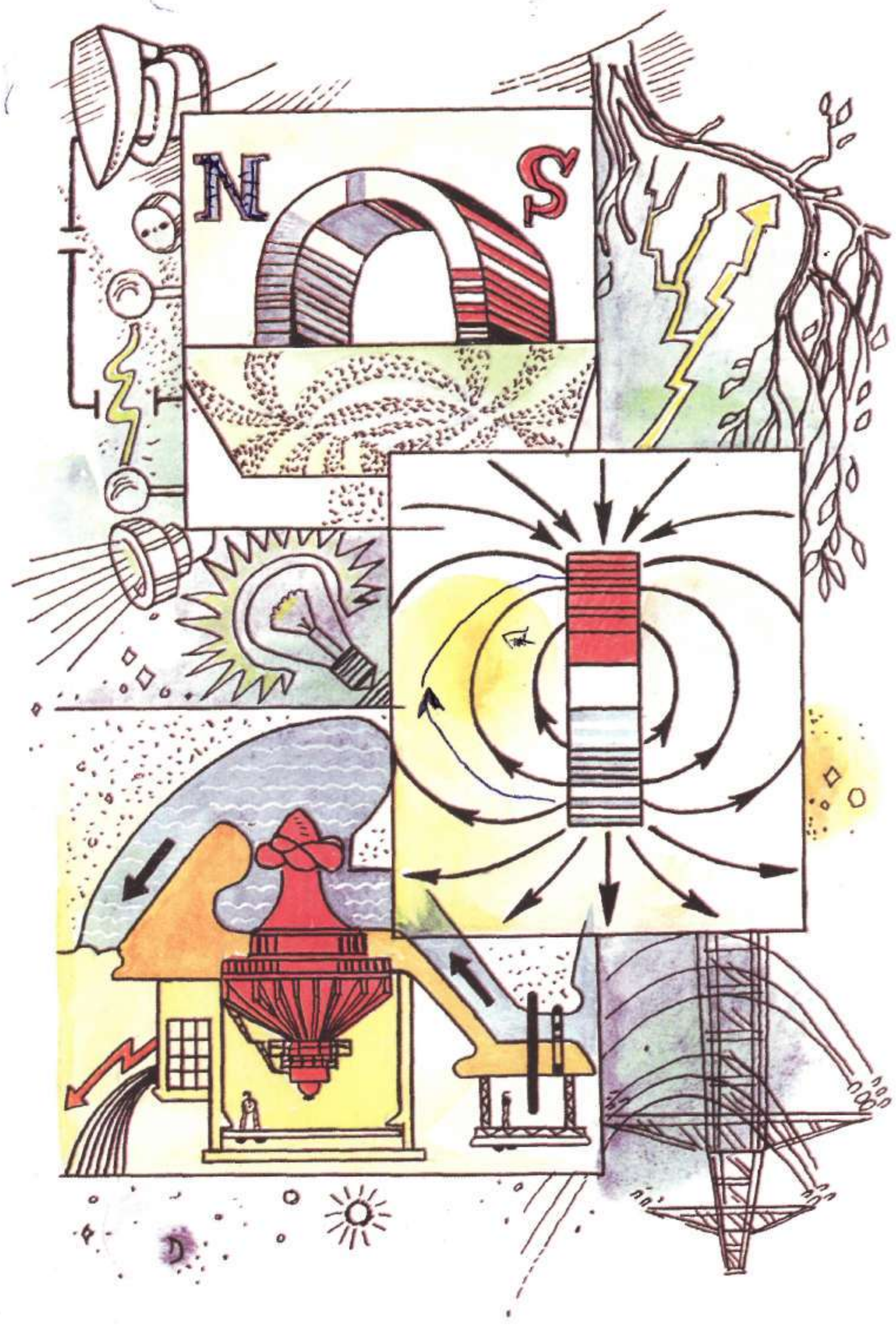
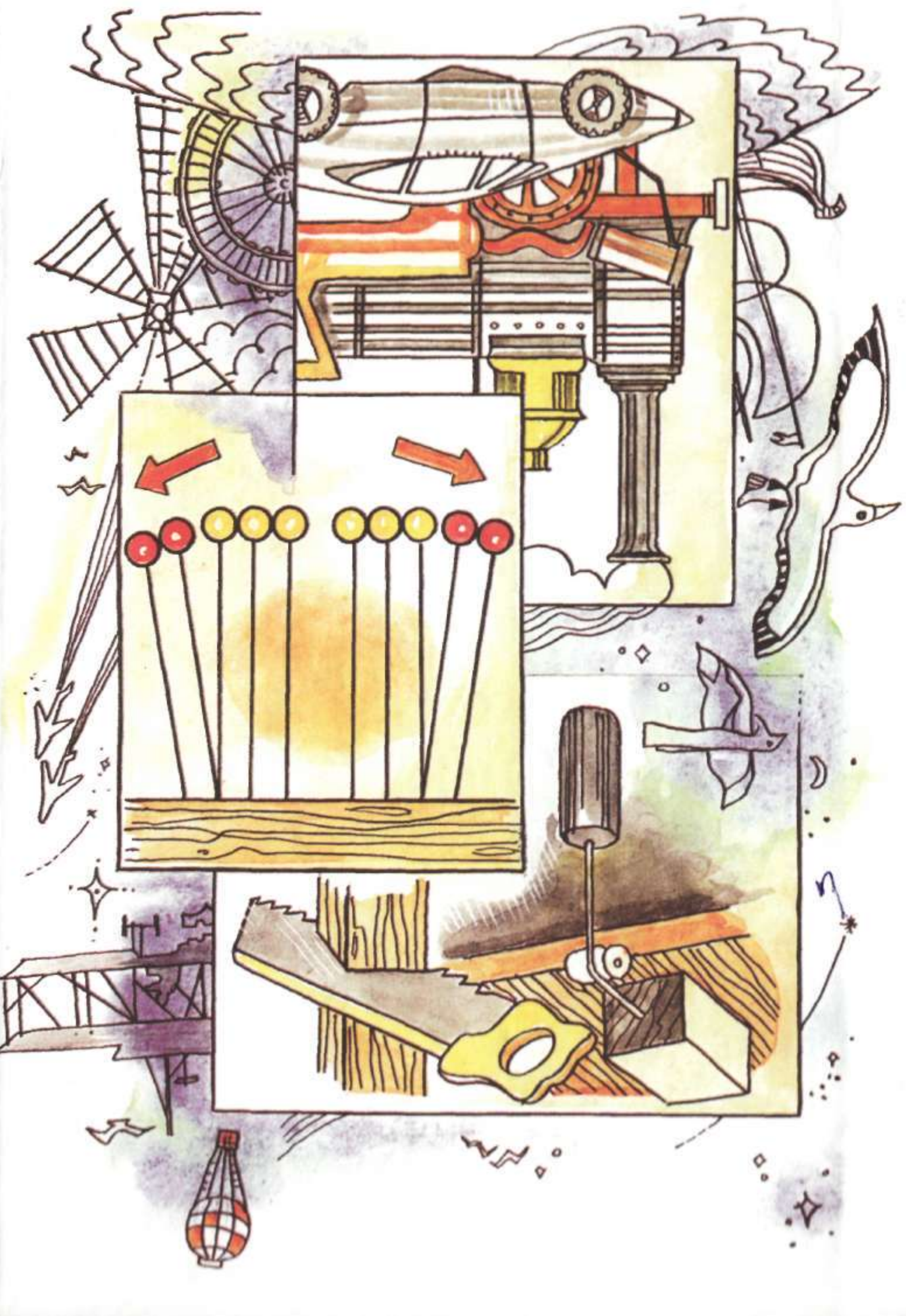
УЧИТЕСЬ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ


N
S



Г. В. ЕФАШКИН Н. Н. РОМАНОВСКАЯ
А. Н. ТАРАСОВА

УЧИТЕСЬ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

КНИГА ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

Под редакцией А. Н. Тарасовой

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
«УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА»
1997

УДК 373.167.1
ББК 22.3
Е90

Ефашкин Г. В. и др.

Е90 Учитесь решать задачи по физике: Кн. для учащихся/Г. В. Ефашкин, Н. Н. Романовская, А. Н. Тарасова; Под ред. А. Н. Тарасовой.— М.: Просвещение: Учеб. лит., 1997.— 240 с.: ил.— ISBN 5-09-007122-5.

В книге содержатся задачи с их решениями по основным разделам курса физики средней школы. Цель книги — научить учащихся решать задачи по физике различной степени сложности.

Для поступающих в ВУЗы, учащихся старших классов, а также учителей.

Е $\frac{4306020000-325}{103(03)-97}$ без объявления ББК 22.3

ISBN 5-09-007122-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие является обобщением двадцатипятилетнего опыта работы авторов по подготовке оригинальных задач по физике для вступительных экзаменов в Московский Государственный институт электроники и математики.

Непосредственное общение с абитуриентами во время вступительных экзаменов дало возможность понять, какие трудности испытывает учащийся при подготовке как к выпускным экзаменам в школе, так и к вступительным экзаменам в вуз.

Большинство учащихся умеет решать простые задачи, в которых необходимо в известную формулу подставить числовые значения физических величин. Решение же более сложных задач, в которых формулу нужно вывести из других соотношений или использовать законы из других разделов курса физики, вызывает непреодолимые трудности.

Для решения многих задач существуют определенные приемы, методы. Есть и такие задачи, к которым стандартные методы неприменимы; при их решении необходимо или ввести дополнительные условия, или составить несколько математических уравнений и затем решить их.

Цель настоящего пособия — на примере решения более 200 задач из разных разделов элементарной физики показать определенные приемы и методы решения и научить читателя пользоваться ими при решении любых задач.

Задачи в пособии располагаются по возрастанию трудности, что дает возможность учащимся, разобравшись в решении одной задачи, попробовать свои силы в решении более трудной задачи.

К каждой задаче даны указания к решению, в которых приведены некоторые теоретические соотношения и советы по использованию тех или иных законов физики.

В пособии рассматривается решение каждой задачи, именно рассматривается, так как для многих задач приведено несколько различных подходов к решению.

Авторы рекомендуют следующий порядок работы с пособием. Сначала нужно внимательно прочитать условие задачи и попробовать ее решить. Если возникают затруднения при решении, нужно обратиться к указаниям, затем снова вернуться к решению задачи. Решив ее, нужно сравнить свое решение с решением, приведенным в книге, осмыслить его, разобраться в допущенных ошибках и только после этого приступать к следующей, более сложной задаче.

Задачи подобраны Г. В. ЕФАШКИНЫМ. Решения задач разделов «Механика» и «Оптика» написаны А. Н. ТАРАСОВОЙ, разделов «Молекулярная физика» и «Электромагнетизм» — Н. Н. РОМАНОВСКОЙ. Общее редактирование проведено А. Н. ТАРАСОВОЙ.

Авторы выражают благодарность профессору В. А. ОРЛОВУ и доценту Л. Ф. УТКИНОЙ за конкретные замечания по рукописи учебного пособия, а также профессору Н. Н. СИБЕЛЬДИНУ за участие в составлении задач

ГЛАВА I

МЕХАНИКА

1.1. Движение материальной точки задано уравнением $x = At + Bt^2$, где $A = 2$ м/с, $B = -2$ м/с^2. Определите ускорение движения точки и путь, пройденный ею до остановки. Постройте графики зависимости от времени ускорения, скорости и координаты.

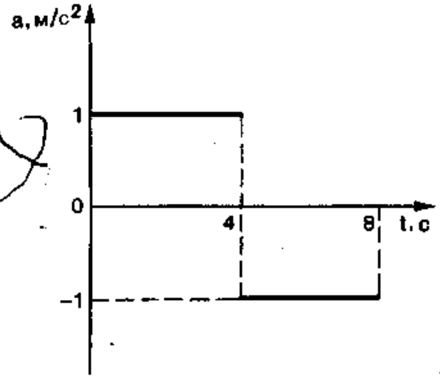


Рис. 1

1.2. На рисунке 1 дан график зависимости ускорения от времени при прямолинейном движении материальной точки. Постройте графики зависимости скорости от времени для этого движения. Определите путь, пройденный точкой за все время движения. Рассмотрите случаи, когда: 1) начальная скорость равна нулю; 2) начальная скорость $v_0 = 2$ м/с; 3) начальная скорость $v_0 = -1$ м/с. Постройте также графики зависимости координаты от времени; начальная координата равна нулю ($x_0 = 0$).

1.3. Две материальные точки движутся прямолинейно. Графики зависимости скорости от времени приведены на рисунке 2; ломаная $OABC$ — для первой точки, ODC — для второй. Опишите характер движения точек. Постройте графики зависимости ускорения и координаты от времени.

1.4. Из окна вагона, движущегося по горизонтальному пути со скоростью $v = 54$ км/ч, выпал предмет. Окно расположено на высоте $h = 2{,}5$ м от поверхности земли. Определите расстояние от места, где предмет выпал из окна, до места его падения на землю.

1.5. Снаряд, вылетевший из орудия под углом α к горизонту, находился в полете в течение времени $T = 12$ с. Определите наи-

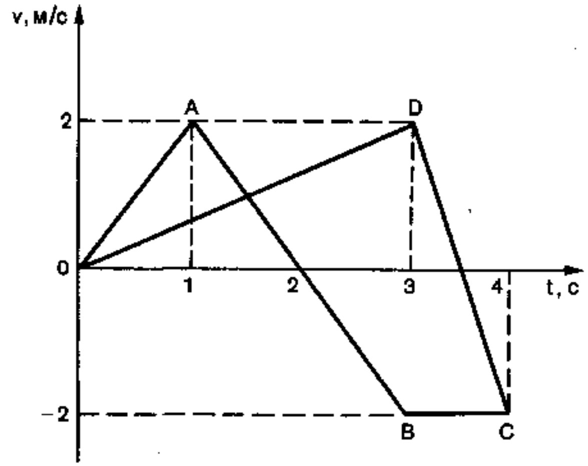


Рис. 2

большую высоту подъема снаряда. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

1.6. Камень брошен вертикально вверх со скоростью $v_0 = 15$ м/с. Определите, через сколько времени он окажется на высоте $H = 3$ м. Определите потенциальную и полную энергию камня в этот момент времени. Масса камня $m = 0{,}2$ кг.

1.7. Тело свободно падает с некоторой высоты H. Путь, пройденный им за последнюю секунду, в 7 раз больше пути, пройденного за первую секунду. Определите время падения и высоту H.

1.8. В последнюю секунду свободного падения тело прошло путь, в 2 раза больший, чем в предыдущую. Определите время падения и высоту, с которой падало тело.

1.9. Два тела бросили вертикально вверх с одинаковой скоростью $v_0 = 20$ м/с через промежуток времени $\tau = 1$ с одно после другого. Определите, где и когда (через сколько времени после бросания первого тела) они встретятся. Примите $g \approx 10$ м/с^2.

1.10. Тело массой $M = 1$ кг бросают под углом α к горизонту. Определите этот угол, если известно, что кинетическая энергия тела в точке максимального подъема составляет 25% от его кинетической энергии в момент бросания, а потенциальная энергия относительно точки бросания $E_п = 24$ Дж. Определите дальность полета и максимальную высоту подъема этого тела.

1.11. Тело массой $m = 400$ г брошено с некоторой высоты по направлению к земле под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Начальная скорость тела $v_0 = 20$ м/с. Определите, через сколько времени скорость тела будет направлена под углом $\beta = 60°$ к горизонту. Определите изменение потенциальной энергии тела за это время. Ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.

1.12. Тело массой $m = 0{,}5$ кг брошено со скоростью $v_0 =$

$=20$ м/с под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Определите наибольшую высоту полета и изменение импульса за время полета. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Примите $g\approx10$ м/с^2.

1.13. Катер пересекает реку шириной $l=360$ м. Скорость течения $v=2$ м/с. Рулевой держит курс перпендикулярно течению. Двигатель обеспечивает постоянное ускорение $a=0{,}1$ м/с^2. Начальная скорость катера равна нулю. Определите, через сколько времени катер пересечет реку. На какое расстояние он будет снесен течением?

1.14. Из окна вагона поезда, движущегося по горизонтальной дороге со скоростью $v=54$ км/ч, бросают в горизонтальном направлении предмет. Предмет падает на землю на расстоянии $s=12{,}1$ м от места, над которым он находился в момент бросания. Определите скорость v_0 предмета относительно вагона сразу после бросания, если она была направлена перпендикулярно скорости движения поезда. Высота окна над поверхностью земли $H=2{,}5$ м. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

1.15. Тело *1* бросают вертикально вверх с начальной скоростью $v_0=30$ м/с. Тело *2*, находящееся на высоте $H=40$ м по вертикали и на расстоянии $l=20$ м по горизонтали от точки бросания тела *1*, бросают горизонтально со скоростью $v_1=20$ м/с. Определите, с каким запаздыванием или опережением τ надо бросить тело *2*, чтобы тела столкнулись в полете. Ускорение свободного падения $g\approx10$ м/с^2.

1.16. Человек начинает подниматься по движущемуся вверх эскалатору метро с ускорением $a=0{,}21$ м/с^2. Добежав до середины эскалатора, он останавливается, поворачивает и начинает спускаться вниз с тем же ускорением. Определите, сколько времени человек находится на эскалаторе. Длина эскалатора $l=100$ м, а скорость его движения $v=2$ м/с.

1.17. Самолет, пролетая над зенитной батареей на высоте $H=1$ км, начинает пикировать с выключенным двигателем на цель со скоростью $v_1=540$ км/ч, направленной под углом $\alpha=60°$ к горизонту. Самолет сбивают выстрелом из орудия, произведенным в тот момент времени, когда он находился над батареей. Определите, на каком расстоянии от батареи, считая по горизонтальному направлению, снаряд попал в самолет. Скорость снаряда при вылете из ствола орудия $v_2=600$ м/с. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

1.18. Две лодки переплывают реку, отправляясь одновременно из пунктов *A* и *B*, расположенных на противоположных берегах реки против друг друга. Скорость течения реки $v_р=$ $=20$ м/мин, ширина реки $l=200$ м. Скорости лодок относительно воды равны $v_1=15$ м/мин, $v_2=20$ м/мин. Первая лодка начала движение перпендикулярно течению, а вторая держит курс под углом $\alpha=150°$ к скорости течения реки. Определите, на каком расстоянии от пункта *A* будет находиться первая лодка, когда расстояние между лодками будет наименьшим.

1.19. Лодочник отплывает из пункта *A*, держа курс перпендикулярно берегу. Скорость течения реки $v_р=2$ м/с, ее ширина $h=144$ м. Лодка в течение времени t_1 движется равноускоренно с ускорением $a=1$ м/с^2, а затем в течение промежутка времени t_2 движется равномерно и, наконец, в течение промежутка времени t_1 — равнозамедленно с тем же ускорением a. Определите промежутки времени t_1 и t_2, если известно, что лодка пришла в пункт *B*, расположенный на противоположном берегу реки на расстоянии $l=80$ м вниз по течению. Постройте траекторию движения лодки в системе координат (XOY), связанной с берегом.

1.20. Из танка, движущегося со скоростью $v=70$ км/ч, стреляют по горизонтально летящему на высоте $H=6$ км самолету. Скорость самолета $u=790$ км/ч, а ее направление совпадает с направлением движения танка. Определите угол вылета α снаряда относительно горизонта. Известно, что в момент выстрела самолет находился над танком, а снаряд попал в самолет в высшей точке траектории.

1.21. В широком сосуде налита жидкость до высоты H. Через отверстие у дна сосуда жидкость начинает вытекать, причем ее скорость направлена под углом $\alpha=60°$ к горизонту (рис. 3). Определите высоту уровня жидкости в сосуде H, если известно, что струя поворачивается к земле в точке, расположенной на высоте $h=15$ см от дна сосуда.

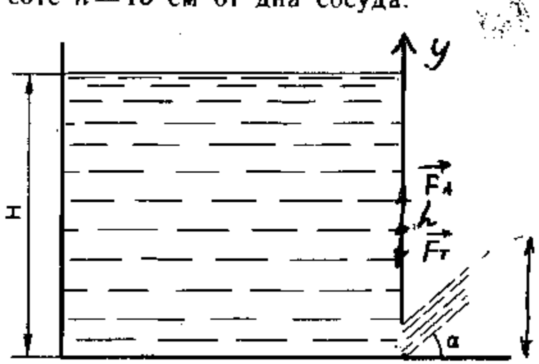


Рис. 3

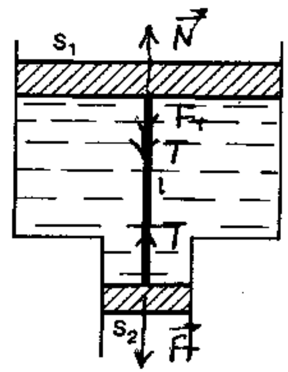


Рис. 4

1.22. В двух цилиндрических сосудах площадью сечения $S_1=100$ см^2 и $S_2=10$ см^2 находятся два невесомых поршня, соединенных тонкой невесомой нитью длиной $l=50$ см (рис. 4). Пространство между поршнями заполнено водой. Определите натяжение нити, если цилиндры открыты в атмосферу и система находится в равновесии.

1.23. В сосуд, имеющий форму прямого усеченного конуса с радиусом основания $R=10$ см, налита вода. Уровень воды находится на высоте $H=10$ см от дна сосуда. Определите силу давления воды на боковую поверхность сосуда. Образующая конуса составляет угол $\alpha=45°$ с его высотой.

1.24. Два груза, изготовленные из различных материалов с плотностями $\rho_1 = 0{,}6$ г/м^3 и $\rho_2 = 1{,}8$ г/см^3, связаны невесомой нитью и помещены в достаточно глубокий сосуд с водой. Определите отношение объемов грузов, при котором они будут плавать под поверхностью воды, не касаясь дна сосуда. Определите отношение натяжения нити к силе тяжести обоих тел. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

1.25. Два груза массами $m_1 = 0{,}2$ кг и $m_2 = 0{,}3$ кг связаны нерастяжимой нитью. Нить перекинута через блок. Определите ускорение грузов, силу натяжения нити и силу давления на ось блока. Массой нити и массой блока можно пренебречь.

1.26. Грузы P и Q находятся в равновесии с системой блоков (рис. 5). На груз Q кладут перегрузок массой $m = 0{,}2$ кг, и система приходит в движение. Определите силу давления перегрузка на груз Q. Масса груза P $M = 0{,}3$ кг.

1.27. На тело массой $m = 0{,}2$ кг действует сила, изменяющаяся по закону $F = At$, где $A = 0{,}5$ Н/с. Определите ускорение и скорость груза через время $t = 2$ с после начала движения.

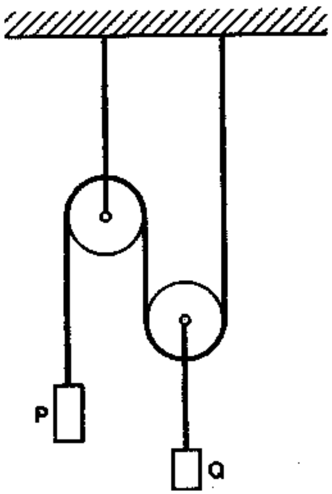


Рис. 5

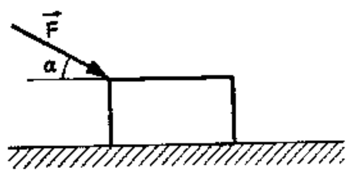


Рис. 6

1.28. Тело массой $m = 0{,}5$ кг покоится на горизонтальной поверхности. К телу приложена сила $F = 10$ Н под углом $\alpha = 60°$ к горизонту, как показано на рисунке 6. Определите минимальный коэффициент трения, при котором тело остается в покое.

1.29. Человек везет сани массой $M = 30$ кг по горизонтальной дороге, прикладывая силу $F = 40$ Н под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Определите ускорение, с которым движутся сани; работу, совершенную человеком за время $t = 60$ с после начала движения. Коэффициент трения о дорогу $\mu = 0{,}05$.

1.30. Два груза одинаковой массой M соединены стержнем, масса которого m. Стержень может выдерживать максимальное натяжение T_{max}. Определите силу F, приложенную к одному из грузов, при которой произойдет разрыв стержня. Сила направлена параллельно плоскости. Коэффициент трения грузов о горизонтальную поверхность равен μ.

1.31. Резиновый шнур длиной l движется по шероховатой поверхности стола под действием силы F, приложенной к одному из его концов и направленной вдоль шнура. Пренебрегая удлинением резины, определите силу натяжения шнура в его сечении, отстоящем на расстоянии b от точки приложения силы.

1.32. Тело массой $m = 20$ кг движется по горизонтальной поверхности. В некоторый момент времени, когда скорость тела была равна $v_0 = 10$ м/с, на него начала действовать тормозящая сила. После этого на расстоянии $s = 15$ м скорость тела уменьшилась до $v = 5$ м/с. Коэффициент трения $\mu = 0{,}2$. Определите тормозящую силу.

1.33. Тело скользит по поверхности клина с углом наклона $\alpha = 30°$. Клин находится на горизонтальной поверхности. Определите коэффициент трения μ_0 между клином и плоскостью, при котором клин будет неподвижен. Коэффициент трения между клином и телом $\mu = 0{,}2$. Массой клина можно пренебречь.

1.34. Два груза массами m и M связаны нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный блок (рис. 7). Коэффици-

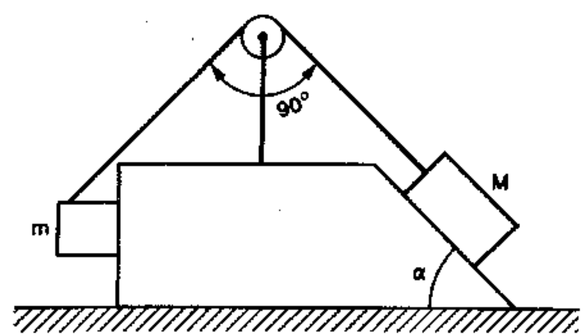


Рис. 7

ент трения между грузами и гранями клина $\mu = 0{,}2$. Угол наклона клина $\alpha = 45°$. Определите, при каком соотношении между массами грузов возможно равновесие системы. Массой нити и блока можно пренебречь.

1.35. Прямоугольный клин массой $M = 4$ кг покоится на горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени на клин ставят два груза массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг (рис. 8). Определите ускорение клина. Трение между грузами и клином, а также между клином и плоскостью отсутствует. Угол $\alpha = 30°$.

1.36. Танк массой $m = 50$ т движется по выпуклому мосту.

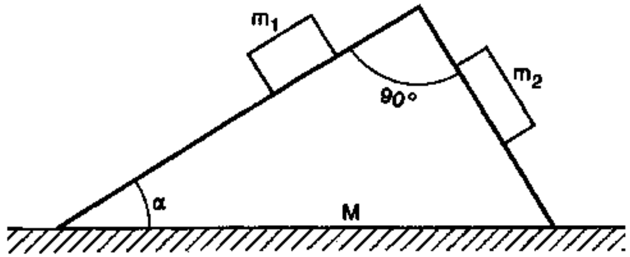


Рис. 8

Определите минимальную скорость, с которой может двигаться танк по мосту, выдерживающему статическую нагрузку $N = 4 \cdot 10^4$ Н. Радиус кривизны моста $R = 50$ м.

1.37. Самолет делает «мертвую петлю», двигаясь по окружности радиусом $R = 0{,}4$ км в вертикальной плоскости. Определите скорость самолета, при которой в верхней точке траектории летчик не давил бы на сиденье и не отделялся от него.

1.38. Небольшой шарик массой $m = 2$ кг подвешен на нити. Шарик отвели в сторону так, что нить приняла горизонтальное положение, и отпустили. Определите угол между нитью и вертикалью, при котором нить оборвется. Нить выдерживает максимальное натяжение $T_{max} = 30$ Н. Ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.

1.39. Тело массой $m = 0{,}2$ кг, прикрепленное к нити, движется по окружности в вертикальной плоскости. Определите разность сил натяжения нити в нижней и в верхней точках траектории ($g \approx 10$ м/с^2).

1.40. Один конец нити закреплен в точке A, к другому концу привязано тело. Телу сообщили скорость, и оно стало двигаться по окружности в вертикальной плоскости вокруг точки A. Определите массу тела, если разность между максимальной и минимальной силами натяжения нити равна $\Delta T = 12$ Н. Ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.

1.41. Два груза одинаковой массы, связанные невесомым стержнем, двигаются по окружностям в вертикальной плоскости вокруг общего центра O (рис. 9). Расстояние от центра O до одного из грузов $r = 10$ см, а до другого $R = 30$ см. Определите, с какой угловой скоростью стержень проходит положение равновесия, если наибольший угол отклонения стержня от вертикального направления $\Theta = 60°$.

1.42. Один конец нерастяжимой нити закреплен. К другому концу подвешен небольшой шарик. Шарику сообщили начальную скорость, направленную горизонтально. Ускорение шарика горизонтально в тот момент, когда нить составляет с вертикалью угол $\alpha = 30°$. Определите угол максимального отклонения нити от вертикали.

1.43. Система состоит из двух грузов массами $M = 200$ г и

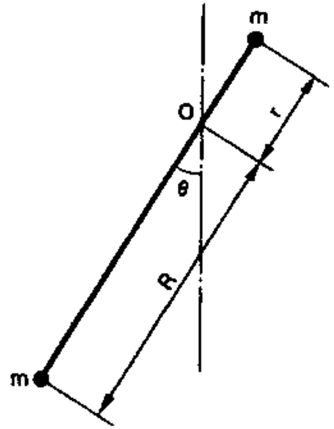


Рис. 9

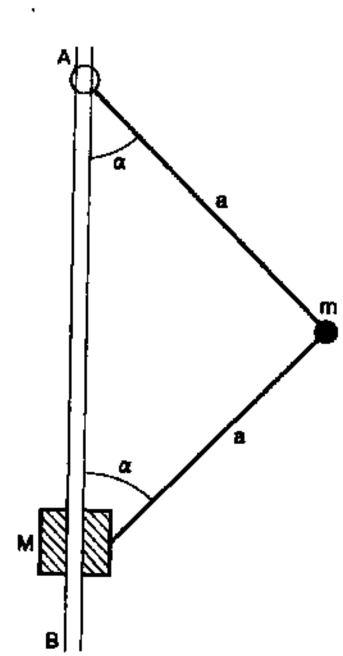


Рис. 10

$m = 50$ г. Грузы связаны между собой стержнем длиной $a = 40$ см. Такой же стержень соединяет груз массой m с осью вращения AB, расположенной вертикально (рис. 10). Все соединения шарнирные. Груз массой M может скользить вдоль осевого стержня AB, причем коэффициент трения $\mu = 0{,}3$. Определите, при какой угловой скорости угол между каждым из стержней и осью вращения (стержнем AB) $\alpha = 45°$.

1.44. Тонкий стержень постоянного по длине сечения вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Определите линейную скорость концов стержня, при которой произойдет его разрыв. Предел прочности на разрыв материала стержня $\sigma = 2{,}5 \cdot 10^8$ Н/м^2, плотность материала стержня $\rho = 8$ г/см^3.

1.45. Проволочное кольцо радиусом $R = 20$ см вращается вокруг вертикальной оси в горизонтальной плоскости. Ось проходит через центр кольца. Определите угловую скорость вращения ω, при которой произойдет разрыв кольца. Предел прочности на разрыв материала кольца $\sigma = 10^8$ Н/м^2, плотность материала $\rho = 10^4$ кг/м^3. Диаметр проволоки много меньше радиуса кольца.

1.46. Два груза связаны невесомой и нерастяжимой нитью длиной $l = 1$ м. Масса грузов одинакова: $m = 100$ г. Грузы и нить свободно падают в вертикальной плоскости, при этом нить расположена горизонтально и не провисает. В некоторый момент времени середина нити зацепляется за гвоздь. Определите скорость в момент зацепления, если известно, что при дальнейшем движении нить не разрывается. Материал нити способен выдерживать максимальную нагрузку $T_{max}=25$ Н. Размерами грузов можно пренебречь.

1.47. Катушку тянут за намотанную на нее нить с силой $\vec{F}$, направленной под углом $\alpha=30°$ к горизонту (рис. 11). Катушка при этом скользит по горизонтальной плоскости, не вращаясь. Определите ускорение катушки. Коэффициент трения между катушкой и плоскостью $\mu=0,2$, $R=4$ см, $r=2$ см.

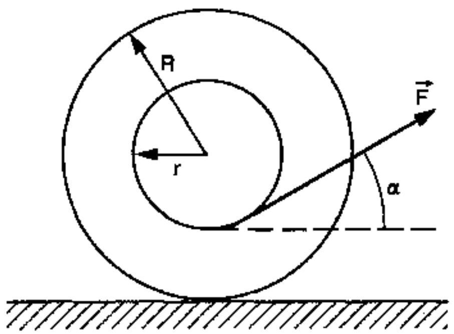


Рис. 11

1.48. Гоночный автомобиль движется в горизонтальной плоскости со скоростью $v=90$ км/ч по внутренней поверхности вертикального цилиндра радиусом $R=10$ м. Определите максимальный коэффициент трения между шинами автомобиля и поверхностью цилиндра, при котором возможно такое движение.

1.49. Мотоциклист совершает «полет» колесами вверх под куполом цирка. Для этого он разгоняется по внутренней поверхности цилиндра радиусом $R=25$ м. Мотоциклист «приземляется» на внутреннюю поверхность другого цилиндра такого же радиуса. Оси обоих цилиндров горизонтальны, параллельны и расположены на одинаковой высоте (рис. 12). Определите расстояние

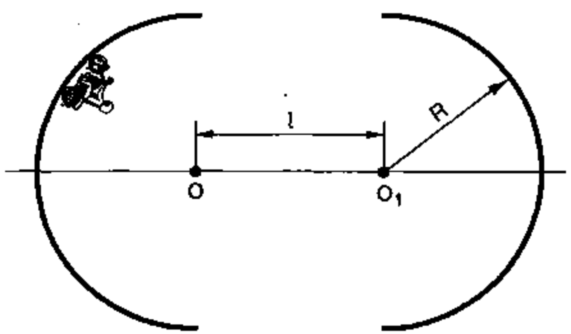


Рис. 12

между осями цилиндров, при котором мотоциклист сможет сделать этот перелет. Скорость мотоциклиста в момент отрыва от поверхности первого цилиндра $v=54$ км/ч.

1.50. Кинетическая энергия вертикально брошенного тела в момент бросания равна $E_0=160$ Дж. Определите, до какой высоты H от точки бросания может подняться тело. Определите, на какой высоте H_1 потенциальная энергия относительно точки бросания равна кинетической энергии в этот же момент времени. Масса тела $m=800$ г.

1.51. Хоккейная шайба, имея начальную скорость $v_0=5$ м/с, скользит по льду и до удара о борт площадки проходит расстояние $l=10$ м. Определите путь, который пройдет шайба после удара о борт. Удар считайте абсолютно упругим. Коэффициент трения шайбы о лед $\mu=0,1$.

1.52. Пуля массой $m=10$ г, летевшая горизонтально со скоростью $v_0=150$ м/с, простреливает лежащий на столе брусок массой $M=2,5$ кг и теряет при этом половину своей кинетической энергии. Определите скорость бруска.

1.53. Шарик массой $m=50$ г движется горизонтально. Кинетическая энергия этого шарика равна $E_0=3,92$ Дж. Он сталкивается с бруском массой $M=150$ г, неподвижно висящим на нити длиной $l=1$ м (рис. 13). После абсолютно неупругого удара шарик и брусок движутся как единое целое. Определите наибольший угол отклонения нити от вертикали и силу натяжения нити при прохождении системой положения равновесия.

1.54. Тело A налетает на неподвижное тело B и после удара движется с вдвое меньшей скоростью в направлении, перпендикулярном к первоначальному. Определите направление движения тела B после удара.

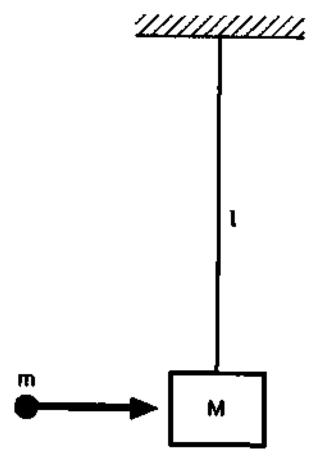


Рис. 13

1.55. Тело соскальзывает с вершины наклонной плоскости. Высота плоскости $H=0{,}5$м, угол наклона $\alpha=45°$. На горизонтальной поверхности на расстоянии $b=50$ см от основания плоскости находится вертикальная стенка (рис. 14). Тело упруго ударяется о стенку и движется в обратном направлении. Определите, на какую высоту поднимется тело. Коэффициент трения о поверхности одинаков и равен $\mu=0{,}2$.

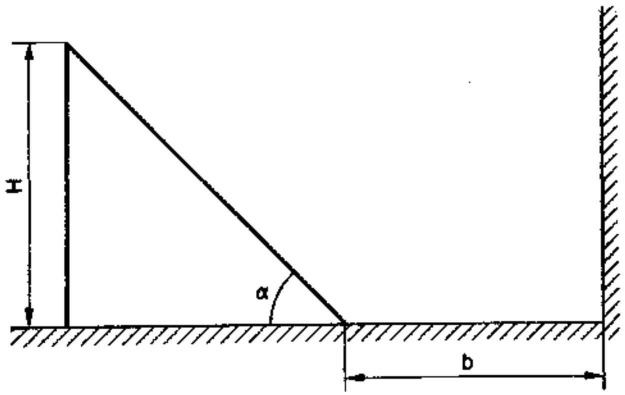


Рис. 14

1.56. Снаряд, летящий горизонтально со скоростью $v_0=150$ м/с, разрывается на две части. Взрыв происходит на высоте $H=320$ м. Массы образовавшихся частей относятся как 1:2. Через время $t_0=4$ с после взрыва больший осколок падает под тем же местом, где произошел взрыв. Определите расстояние от этого места до места падения легкого осколка. Сопротивлением воздуха можно пренебречь ($g\approx10$ м/с^2).

1.57. Шарик массой $m=9$ г, движущийся со скоростью $v_0=5$ м/с, сталкивается с покоящимся шариком массой $M=16$ г. После абсолютно упругого удара шарики разлетаются таким образом, что направления их скоростей составляют одинаковые углы с направлением скорости $\vec{v}_0$. Определите скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ шариков после удара и угол α между векторами скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.

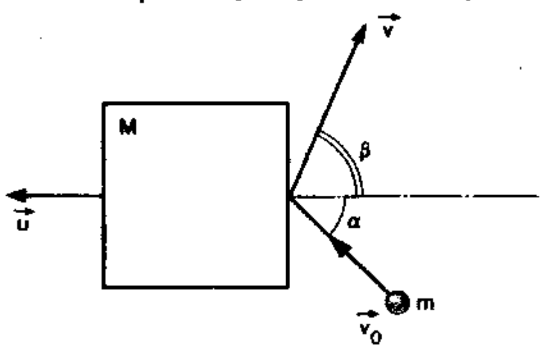


Рис. 15

1.58. Куб массой $M=1{,}05$ кг покоится на горизонтальном столе, по которому он может перемещаться без трения. Горизонтально движущийся со скоростью $v_0=10$ м/с шарик массой $m=0{,}35$ кг сталкивается с кубом (на рисунке 15 показан вид сверху). Определите угол β между скоростью шарика после абсолютно упругого удара и нормалью к поверхности куба. Определите скорость u куба и скорость v шарика после столкновения. Вектор начальной скорости составляет с нормалью к поверхности куба угол $\alpha=45°$.

1.59. При ударе о горизонтальную плиту тело потеряло $\eta=0{,}11$ своей энергии. Непосредственно перед ударом тело имело скорость $v_0=4{,}9$ м/с, направленную под углом $\alpha=60°$ к горизонту. Определите расстояние s от места удара тела о плоскость до второго столкновения его с этой плитой. Трение при ударе между плитой и телом отсутствует.

1.60. Доска массой $M=400$ г движется по поверхности стола. Коэффициент трения между поверхностью стола и доской $\mu_2=0{,}2$. В некоторый момент времени, когда скорость доски была $v_0=0{,}5$ м/с, на нее осторожно опустили брусок массой $m=200$ г. Определите путь, который брусок пройдет по доске, пока он не остановится относительно доски. Коэффициент трения между бруском и доской $\mu_1=0{,}3$. Поверхность стола считайте горизонтальной.

1.61. Шарик массой $m=100$ г, движущийся горизонтально, сталкивается с клином массой $M=86{,}5$ г. Угол наклона клина $\alpha=45°$. Клин может без трения скользить по горизонтальной плоскости (рис. 16). Определите угол β с горизонтом, под которым будет двигаться шарик после абсолютно упругого удара о поверхность клина.

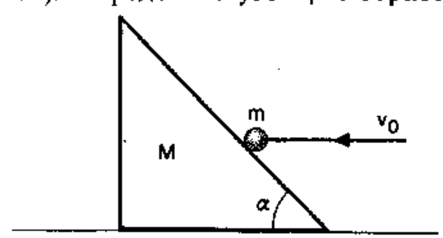


Рис. 16

1.62. Шарик массой $m=20$ г сталкивается с кубом массой $M=400$ г, отражается от него, а затем отражается от горизонтальной плиты (рис. 17). Куб до столкновения покоился. Скорость шарика перед ударом о куб $v_0=2$ м/с и направлена под углом $\alpha=60°$ к поверхности куба. Считайте удары шарика с кубом и плитой абсолютно упругими. Определите расстояние, пройденное кубом к тому времени, когда шарик снова ударится о плиту. Трением и размерами куба, а также временем до удара в точке A можно пренебречь.

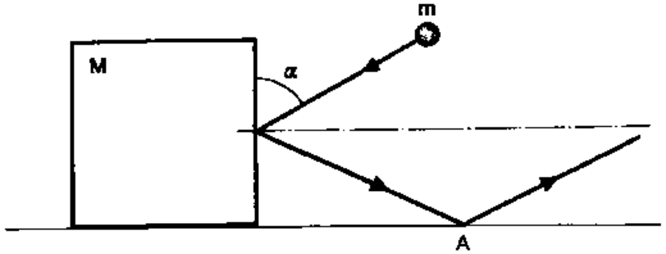


Рис. 17

1.63. Тело *1* массой $m=200$ г покоится на поверхности неподвижного тела *2* массой $M=400$ г (рис. 18). Тело *3* массой

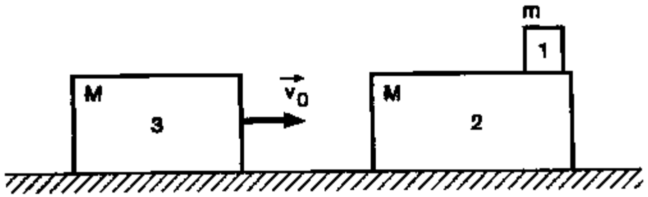


Рис. 18

M приближается к первым двум телам со скоростью $v_0=1$м/с. Через некоторое время после абсолютно неупругого удара все три тела движутся как единое целое. Определите коэффициент трения μ между телами *1* и *2*. Известно, что тело *1* прошло по поверхности тела *2* путь $s=5$ см. Перераспределение импульса между телами *2* и *3* происходит мгновенно. Трением о поверхность стола можно пренебречь.

1.64. Система грузов, изображенная на рисунке 19, находит-

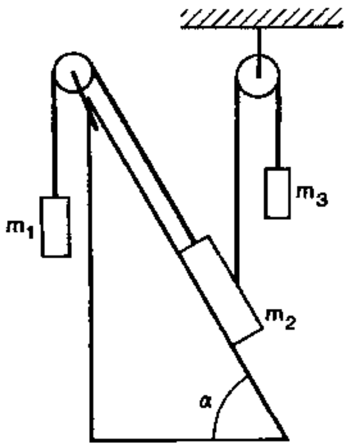


Рис. 19

ся в равновесии. Массы грузов $m_2=500$ г, $m_3=300$ г. Угол наклона плоскости $\alpha=60°$. Коэффициент трения груза массой m_2 с наклонной плоскостью $\mu=0{,}3$. Определите, при какой наибольшей массе груза m_1 система еще останется в равновесии.

1.65. Определите длину L доски, которая может быть забита между двумя вертикальными стенками (рис. 20). Расстояние между стенками $l=3$ м, коэффициент трения между доской и стеной $\mu=0{,}2$. Доску рассматривайте как недеформирующуюся, массой доски можно пренебречь.

1.66. На одной из граней куба массой $M=1$ кг находится тело массой $m=100$ г (рис. 21). Ребро куба $a=20$ см. Тело рас-

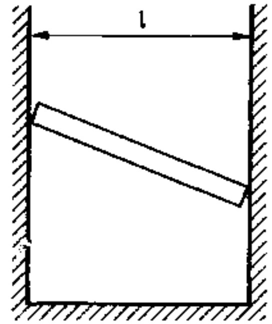


Рис. 20

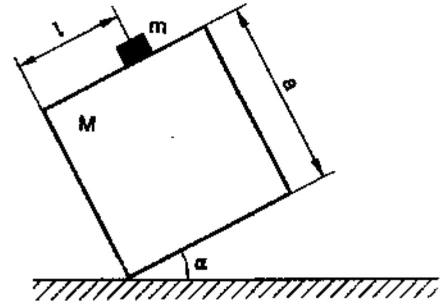


Рис. 21

положено на расстоянии $l=5$ см от одного из ребер куба. Определите угол α между гранью куба и горизонтальной поверхностью, при котором система будет находиться в равновесии. Определите, при каких коэффициентах трения между телом и гранью куба равновесие возможно. Определите характер равновесия. Размерами тела по сравнению с размерами куба можно пренебречь.

1.67. Невесомый клин установлен на ребро на горизонталь-

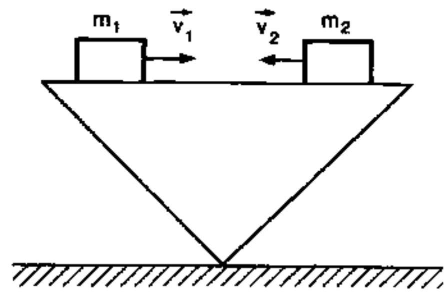


Рис. 22

ной плоскости так, что его основание параллельно этой плоскости (рис. 22). На основание клина ставят два тела массой $m_1=1$ кг и массой $m_2=2$ кг. Телам одновременно сообщают скорости v_1 и v_2, направленные навстречу друг другу; равновесие клина при этом не нарушается. Коэффициент трения между телами и поверхностью клина одинаковый и равен $\mu=0,1$. Определите силу, с которой надо подействовать на одно из тел, чтобы при их движении система оставалась в равновесии. Силу считайте постоянной и направленной вдоль движения. Определите, при каком соотношении между начальными скоростями v_1 и v_2 это равновесие возможно.

1.68. Груз массой $m=250$ г прикреплен к двум невесомым пружинам жесткостью $k_1=150$ Н/м и $k_2=250$ Н/м (рис. 23).

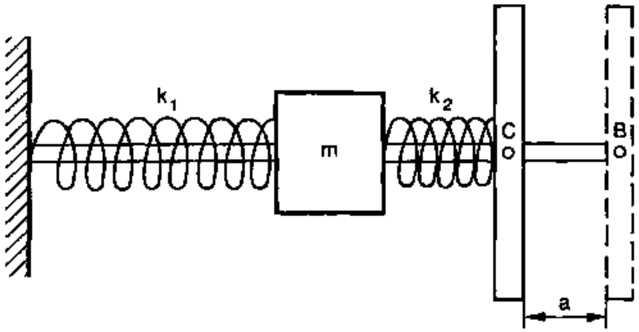


Рис. 23

Первоначально пружины находились в ненапряженном состоянии. В некоторый момент времени правый конец пружины жесткостью k_2 очень быстро сдвигают влево на расстояние $a=4$ см и удерживают его в этом положении. Определите скорость, с которой груз проходит положение равновесия, и амплитуду колебаний груза.

1.69. Невесомая пружина жесткостью $k=100$ Н/м подвешена за один из концов так, что ее ось вертикальна. К другому концу прикрепляют груз массой $m=250$ г. Определите амплитуду колебаний груза и скорость v, с которой он проходит положение равновесия. В момент прикрепления груза натяжения пружины не было.

1.70. Тело совершает гармонические колебания с частотой $\nu=1$Гц. Напишите уравнение колебаний этого тела. Полная энергия $E=6$ мДж, а максимальная возвращающая сила $F_0=3$ мН. Начальная фаза колебаний $\varphi_0=30°$.

1.71. Длина нити математического маятника $l=1$ м, масса груза $m=40$ г. Определите запас энергии маятника. Известно, что при прохождении положения равновесия сила натяжения нити равна $T=0,5$ Н.

1.72. Два тела с одинаковыми массами $m=0,2$ кг движутся навстречу друг другу по горизонтальной поверхности со скоростями $v_1=1$ м/с и $v_2=0,5$ м/с. К одному из тел прикреплена невесомая пружинка жесткостью $k=360$ Н/м (рис. 24). В момент столкновения пружинка оказывается между телами и второе тело прикрепляется к ней. Определите амплитуду колебаний тел. Трением о плоскость можно пренебречь.

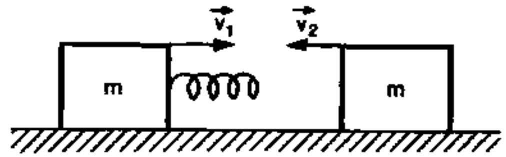


Рис. 24

ГЛАВА II

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

2.1. В сосуде находится газообразный гелий при температуре $T=300$ К. Определите число ударов ν молекул о единицу поверхности стенки сосуда в единицу времени. Плотность газа $\rho=1{,}8\cdot10^{-4}$ г/см^3.

2.2 В сосуде находится газообразный гелий при температуре $T=300$ К и давлении $p=10^5$ Па. Определите число ударов ν молекул о единицу поверхности стенки сосуда в единицу времени.

2.3. В сосуде находятся азот и кислород одинаковой массы под давлением $p=10^5$ Па при температуре $T=300$ К. Определите число ударов ν молекул каждого из газов о единицу поверхности стенки сосуда в единицу времени.

2.4. При напылении серебряного зеркала атомы серебра оказывают на поверхность зеркала давление $p=0{,}1$ Па. Определите, с какой скоростью v растет толщина серебряного покрытия. Энергия каждого атома серебра $E=10^{-21}$ Дж.

2.5. Плотность некоторого соединения углерода и водорода при температуре $t=10\,°$С и давлении $p=10^5$ Па равна $\rho=2{,}5$ кг/м^3. Определите химическую формулу этого соединения.

2.6. Определите изменение массы Δm воздуха в комнате при увеличении температуры на $\Delta T=12$ К. Первоначальная масса воздуха $m_1=100$ кг, температура $t_1=15\,°$С. Давление воздуха не изменяется.

2.7. Газ при давлении $p_1=0{,}2$ МПа и температуре $t_1=15\,°$С имеет объем $V_1=5$ л. Определите объем V_2 этой массы газа при нормальных условиях.

2.8. Шар, содержащий $V_1=6$ л воздуха при нормальном давлении p_1, сообщается с пустым сосудом объемом $V_2=4$ л. Определите давление p_2, установившееся после соединения сосудов при той же температуре.

2.9. При изотермическом сжатии объем газа уменьшается от $V_1=8$ л до $V_2=6$ л, а давление при этом изменяется на $\Delta p=4\cdot10^4$ Па. Определите первоначальное давление газа p_1.

2.10. Два закрытых сосуда с воздухом, объемы которых $V_1=5$ л и $V_2=2$ л, соединены трубкой. Определите давление воздуха p в сосудах после их соединения, если до соединения давления соответственно равны $p_1=10^5$ Па и $p_2=0{,}6\cdot10^5$ Па. Объемом трубки можно пренебречь, температуру считайте постоянной.

2.11. В двух половинах цилиндра, разделенных поршнем, находится газ при одинаковой температуре. Массы газа одинаковы и равны m. Массу газа в одной из половин цилиндра увеличивают в $n=3$ раза. Определите, на каком расстоянии d от первоначального положения будет находиться поршень после установления равновесия. Температура газа в цилиндре постоянна. Объем каждой половины цилиндра $V=1$ л, площадь сечения цилиндра $S=100$ см^2.

2.12. Цилиндр с газом разделен поршнем на две равные части объемом $V_0=1{,}3$ л каждая. Температура в обеих частях цилиндра одинакова и равна $T_0=300$ К. Определите, на какое расстояние d сместится поршень, если температуру в одной части цилиндра увеличить на $\Delta t=50\,°$С, а в другой оставить прежней. Площадь сечения цилиндра $S=100$ см^2.

2.13. В двух частях цилиндра, разделенных поршнем A, находится воздух разной массы m_1 и m_2 при одинаковой температуре (рис. 25). Правый конец цилиндра закрыт подвижным поршнем B. Определите расстояние a, на которое сместится от первоначального положения поршень A после установления равновесия, если сместить поршень B на расстояние $b=4$ см. При равновесии в цилиндре устанавливается первоначальная температура. Отношение масс газа $n=\frac{m_1}{m_2}=3$.

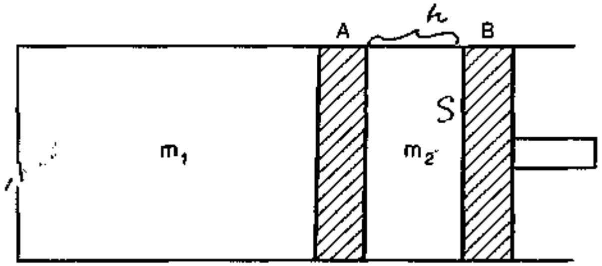


Рис. 25

2.14. В цилиндре под поршнем находится воздух, влажность которого $f=40\%$. Определите, во сколько раз при неизменной температуре нужно уменьшить объем, занимаемый воздухом, чтобы началась конденсация пара.

2.15. Относительная влажность воздуха при температуре $t_1=30\,°$С равна $f_1=0{,}80$. Определите относительную влажность f_2, если воздух нагреется при постоянном объеме до температуры $t_2=50\,°$С. Давление насыщенных паров воды при $30\,°$С $p_{1н}=31{,}8$ мм рт. ст., при $50\,°$С $p_{2н}=92{,}5$ мм рт. ст.

2.16. В закрытый сосуд объемом $V=10$ л помещают несколько капель воды общей массой $m=0{,}258$ г. Затем начинают увеличивать температуру сосуда настолько медленно, что все время поддерживается равновесие между паром и жидкостью. При температуре $t=27\,°$С вода полностью испаряется. Определите давление p насыщенных паров воды при температуре $t=27\,°$С.

2.17. В цилиндр, закрытый поршнем, помещают несколько капель воды общей массой $m=0{,}145$ г при температуре $t=17\,°$С. Затем, поддерживая температуру цилиндра постоянной, увеличивают его объем, поднимая поршень. Поршень поднимается так медленно, что все время поддерживается равновесие между паром и жидкостью. Определите давление p насыщенных паров воды при температуре $t=17$ °С, если вода полностью испаряется, когда объем цилиндра становится равным $V=10$ л.

2.18. В цилиндре под поршнем находится воздух, температура которого $t_1=10$ °С, а относительная влажность $f=0{,}6$. Считая, что плотность насыщенного водяного пара в области температур от $t_1=10$ °С до $t_2=20$ °С увеличивается линейно с ростом температуры, определите точку росы t, если объем цилиндра уменьшится в $n=2$ раза. Плотность насыщенных водяных паров при температуре t_1 равна $\rho_1=9{,}4\cdot10^{-3}$ кг/м^3, а при температуре t_2 $\rho_2=17{,}3\cdot10^{-3}$ кг/м^3.

2.19. Определите работу A, совершаемую идеальным газом, взятым в количестве $\nu=1$ моль, при изобарном нагревании на $\Delta T=1$ К.

2.20. Кислород массой $m=160$ г находится при температуре $t=27$ °С. При изобарном нагревании объем кислорода увеличивается в $n=2$ раза. Определите, какую работу A совершает при этом кислород.

2.21. В цилиндре находится азот массой $m=24$ г при температуре $T=300$ К. Газ охлаждается изохорно так, что его давление падает в $n=3$ раза. Затем газ нагревается при постоянном давлении до тех пор, пока его температура не достигает первоначальной. Определите работу A, совершенную газом.

2.22. Идеальный газ совершает круговой процесс, изображенный на рисунке 26. Определите работу A, совершенную за один цикл при этом процессе. Наименьшая температура газа $t_1=0$ °С, наибольшая $t_3=127$ °С. При нормальных условиях газ занимает объем $V_0=10$ л, объем газа при температуре t_1 равен $V_1=5$ л, при t_3 $V_3=6$ л.

2.23. Состояние газа циклически изменяется, как показано на рисунке 27. Определите работу A, совершенную газом за один цикл. Минимальная температура $t_1=0$ °С, максимальная $t_3=177$ °С. Давление газа при температуре t_3 $p_2=2\cdot10^5$ Па, при температуре t_1 $p_1=1{,}5\cdot10^5$ Па. Объем газа при нормальных условиях $V_0=10$ л.

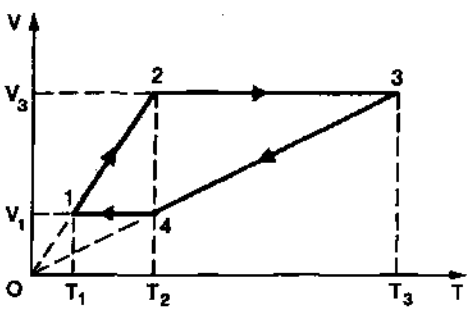


Рис. 26

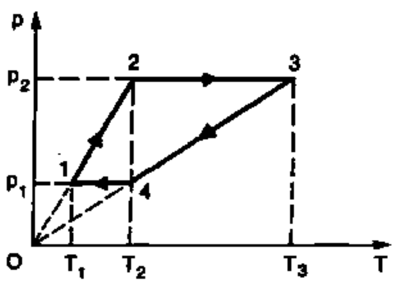


Рис. 27

2.24. При протекании процесса ABC (рис. 28) идеальному газу сообщается количество теплоты $Q_1=4$ кДж. Определите количество теплоты Q_2, которое нужно сообщить этому газу, чтобы провести процесс ADC, если $V_1=2$ л, $V_2=4$ л, $p_1=10^5$ Па, $p_2=3\cdot10^5$ Па. Масса газа не изменяется.

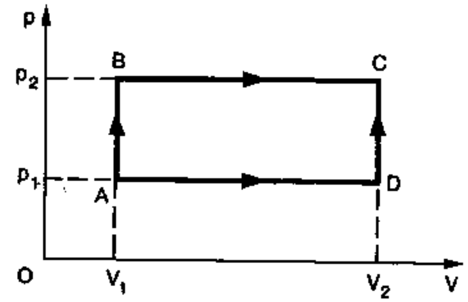


Рис. 28

2.25. Определите количество теплоты Q, необходимой для нагревания при постоянном давлении азота массой $m=7$ г от температуры $t_1=10$ °С до $t_2=25$ °С. Удельная теплоемкость азота при нагревании его при постоянном объеме равна $c_V=750$ Дж/кг·К.

2.26. В цилиндре под поршнем находится воздух. При его изобарном сжатии была совершена работа $A=400$ Дж. Определите количество теплоты Q, отведенной от воздуха. Удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении $c_p=10^3$ Дж/кг·К.

2.27. В одном сосуде находится азот при температуре $T_1=300$ К, а в другом — водород при температуре $T_2=350$ К. Объемы сосудов одинаковы. Плотность газов одинакова и равна $\rho=10^{-3}$ г/см^3. Сосуды соединяют трубкой, объем которой мал по сравнению с объемом сосудов. Определите давление p в сосудах после соединения. Удельная теплоемкость азота при постоянном объеме $c_а=750$ Дж/кг·К, водорода $c_в=10^4$ Дж/кг·К.

2.28. Два закрытых сосуда с воздухом, объемы которых равны соответственно $V_1=5$ л и $V_2=2$ л, соединяют трубкой. Определите температуру T и давление p в сосудах после соединения. До соединения давление и температура воздуха в первом сосуде $p_1=10^5$ Па, $t_1=-23$ °С, а во втором $p_2=2\cdot10^5$ Па и $t_2=27$ °С. Объемом трубки, теплоемкостью сосудов и теплообменом с внешней средой можно пренебречь.

2.29. Цилиндр разделен поршнем на две одинаковые части объемом $V_0=2$ л каждая. В обеих частях находится водород под

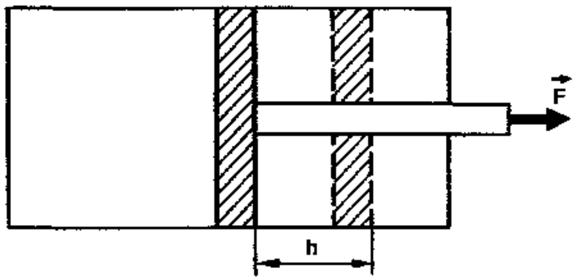


Рис. 29

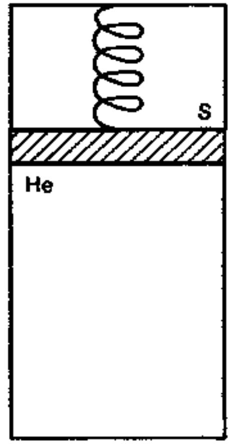


Рис. 30

давлением $p_0=10^5$ Па (рис. 29). Поршень быстро перемещают от среднего положения на расстояние $h=20$ см. При этом совершается работа $A=60$ Дж. Определите силу F, которую надо приложить к поршню, чтобы удержать его в смещенном положении. Площадь сечения цилиндра $S=50$ см^2, удельная теплоемкость водорода при постоянном объеме $c_V=10^4$ Дж/кг·К. Теплоемкостью цилиндра и поршня, а также теплообменом с внешней средой можно пренебречь. Считайте, что тепловое равновесие между газом в обеих частях цилиндра устанавливается мгновенно.

2.30. Цилиндр разделен на две части невесомым поршнем площадью $S=100$ см^2, прикрепленным с помощью невесомой пружины жесткостью $k=10^4$ Н/м к крышке цилиндра. Верхняя часть цилиндра откачана, в нижней находится газообразный гелий (рис. 30). При некоторой температуре поршень находится в равновесии, а гелий занимает объем $V_1=3$ л под давлением $p_1=10^5$ Па. Определите количество теплоты Q, которое нужно сообщить газу, чтобы поршень находился в равновесии при давлении $p_2=2\cdot10^5$ Па.

2.31. Двигатель Дизеля, КПД которого $\eta=35\%$, за некоторое время выбросил в атмосферу $Q=420$ Дж теплоты. Определите работу A, совершенную двигателем за это время.

2.32. В цилиндре под невесомым поршнем находится насыщенный водяной пар. Объем пара $V=1$ м^3. Определите наименьшую массу $m_в$ воды при температуре $t=0$ °С, которую нужно впрыснуть в цилиндр, чтобы весь пар сконденсировался. Атмосферное давление $p=10^5$ Па. Теплоемкостью цилиндра и теплопроводностью его стенок можно пренебречь.

2.33. При изобарном сжатии насыщенных паров азота была совершена работа $A=100$ Дж. Во время сжатия температура

в цилиндре поддерживалась постоянной и равной $T=77$ К. Пренебрегая объемом сконденсировавшейся жидкости, определите количество теплоты Q, отведенное от цилиндра при сжатии. Удельная теплота парообразования азота при $T=77$ К равна $r=199$ кДж/кг.

2.34. В калориметр с теплоемкостью $C=63$ Дж/К было налито масло массой $m_1=250$ г при температуре $t_1=12$ °С. После опускания в масло медного тела массой $m_2=500$ г при температуре $t_2=100$ °С общая температура установилась $t_3=33$ °С. Определите удельную теплоемкость c_1 масла по данным опыта.

2.35. Медное тело, масса которого $m_1=100$ г, а температура $t_1=24$ °С, погружают в жидкий азот. Определите массу азота m_2, который превратится при этом в пар. Температура кипения жидкого азота $T_2=77$ К, удельная теплота парообразования азота при этой температуре $r=199$ кДж/кг.

2.36. При отсутствии центров кристаллизации можно получить переохлажденную воду. Определите массу m_2 образовавшегося льда, если в воду, переохлажденную до температуры $t_1=-10$ °С и взятую в количестве $m_1=1$ кг, бросили маленький кусочек льда и вызвали этим ее замерзание.

2.37. Смешивают воду массой $m_1=300$ г при температуре $t_1=10$ °С и лед массой $m_2=400$ г при температуре $t_2=-20$ °С. Определите температуру t и массу воды $m_в$ после установления теплового равновесия.

2.38. В теплоизолированный откачанный сосуд объемом $V=11$ л положили рядом кусок льда массой $m_1=1$ кг, находящийся при температуре $T_1=273$ К, и кусок меди массой $m_2=3$ кг. Определите первоначальную температуру меди t_2, если в конце процесса в сосуде установилась температура $T=373$ К.

2.39. В сосуде находится некоторое количество воды и такое же количество льда в состоянии теплового равновесия. Через сосуд пропускают водяной пар при температуре $t_1=100$ °С. Определите температуру воды в сосуде t_2, если масса пара, пропущенного через воду, равна первоначальной массе воды. Теплоемкостью сосуда можно пренебречь.

2.40. Определите массу льда m, который можно изготовить за $\tau=1$ ч работы холодильника. Холодильник потребляет от сети мощность $N=100$ Вт, за время $\tau=1$ ч работы в комнате выделяется количество теплоты $Q=4\cdot10^5$ Дж. В холодильник помещают воду при температуре $t_1=27$ °С, температура льда $t_2=0$ °С.

2.41. На электрической плитке мощностью $N=1$ кВт кипит чайник с водой. Определите скорость v истечения пара из носика чайника, если площадь сечения носика $S=1$ см^2, давление на конце носика $p=10^5$ Па. Считайте, что вся энергия, потребляемая плиткой, идет на кипение воды.

2.42. В откачанном сосуде объемом $V=2$ л находится кусочек льда массой $m=10$ г при температуре $t_0=0$ °С. Сосуд ставят на электроплитку мощностью $N=200$ Вт. На нагревание расходуется $\eta=40\%$ мощности плитки. Определите, через какое время τ давление в сосуде будет равно $p=10^5$ Па. Теплоемкостью сосуда можно пренебречь; считайте, что время установления равновесия внутри сосудв бесконечно мало.

2.43. В цилиндре под невесомым поршнем площадью $S=100$ см^2 находится вода массой $m=1$ кг при температуре $t_0=0$ °C. В цилиндре находится нагреватель мощностью $N=500$ Вт. Определите, на какую высоту h поднимется поршень за время $\tau=15$ мин работы нагревателя. Атмосферное давление $p=10^5$ Па. Потерями тепла можно пренебречь.

2.44. В цилиндре под невесомым поршнем площадью $S=10$ дм^2 находится вода массой $m_1=1$ кг при температуре $t_1=0$ °C. Определите, на какую высоту h поднимется поршень, если в воду опустить кусок железа массой $m_2=1$ кг, нагретый до температуры $t_2=1100$ °C. Теплоотдачей и теплоемкостью сосуда можно пренебречь. Атмосферное давление нормальное.

2.45. Вагонетка массой $m=5$ т, двигаясь по горизонтальной дороге со скоростью $v_0=18$ км/ч, начинает тормозить. Определите количество теплоты Q, выделившейся в трущихся поверхностях за время до полной остановки вагонетки.

2.46. Сферическая дождевая капля радиусом $R=2$ мм падает на землю с постоянной скоростью v. Определите, на сколько повысится температура Δt капли за время $\tau=10$ с, если все выделяющееся при движении капли тепло идет на ее нагревание. Сила сопротивления воздуха описывается выражением $F_c=0{,}24\pi R^2 v^2$.

2.47. Свинцовая пуля, летящая горизонтально со скоростью $v_0=500$ м/с, пробивает доску на высоте $h=2$ м над поверхностью земли. Направление скорости пули не изменилось, при движении через доску пуля нагрелась на $\Delta T=200$ К. Определите, на каком расстоянии s от доски пуля упала на землю. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Считайте, что все выделившееся при движении пули через доску тепло пошло на ее нагревание.

2.48. Два тела, сделанные из одного материала, движутся равномерно в одном направлении вдоль одной прямой. Скорость первого тела $v_1=1$ м/с, его масса $m_1=200$ г. Скорость второго тела $v_2=2$ м/с, его масса $m_2=300$ г. Определите, на сколько градусов ΔT нагреются тела в результате абсолютно неупругого удара. Считайте, что все выделившееся при ударе тепло пошло на нагревание тел. Удельная теплоемкость материала тел $c=130$ Дж/кг·К.

2.49. Два свинцовых тела массами $m_1=200$ г и $m_2=300$ г движутся со скоростями $v_1=4$ м/с и $v_2=3$ м/с перпендикулярно друг другу. Определите, на сколько градусов ΔT повысится температура тел после абсолютно неупругого удара. Считайте, что все выделившееся тепло пошло на нагревание тел.

2.50. Рабочий забивает железный гвоздь массой $m_1=50$ г в доску и ударяет $n=6$ раз молотком, масса которого $m_2=0{,}5$ кг. Импульс молотка непосредственно перед ударом $p=6$ Н·с. Определите, на сколько градусов ΔT нагреется гвоздь. Считайте, что все тепло, выделившееся при ударе, пошло на его нагревание.

2.51. Рабочий нарезвет резьбу с шагом $h=1{,}5$ мм на цилиндрической стальной шпильке диаметром $d=10$ мм, прикладывая к воротку момент сил $M=5$ Н·м. Определите, на сколько градусов ΔT нагреется шпилька. Резьба нарезается по всей ее длине, на нагревание идет $\eta=50\%$ всей совершенной работы.

2.52. Невесомая штанга шарнирно соединена с вертикальной осью вращения и с медным телом, которое скользит по горизонтальной плоскости при вращении штанги (рис. 31). Угловая скорость вращения системы $\omega=6$ рад/с. Коэффициент трения тела о плоскость $\mu=0{,}2$, длина штанги $l=0{,}4$ м, угол между штангой и осью вращения $\alpha=60°$. Определите, на сколько градусов ΔT повысится температура тела за время $\tau=1$ мин. Считайте, что все выделившееся тепло идет на нагревание.

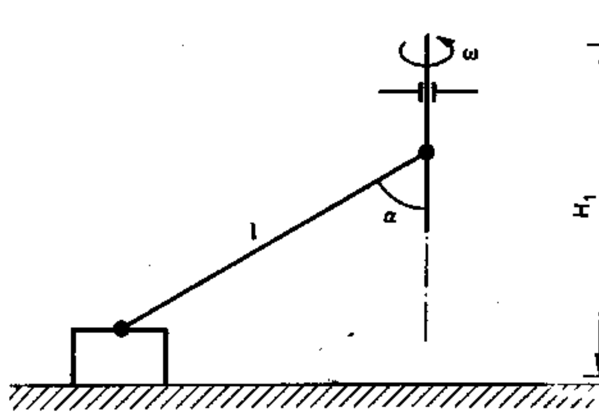


Рис. 31

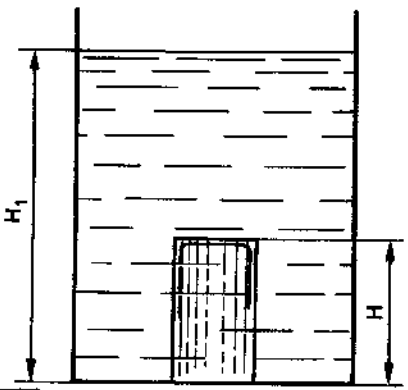


Рис. 32

2.53. Тонкостенный цилиндрический стакан массой $m=100$ г и высотой $H=10$ см ставят вверх дном на гладкое дно сосуда, который после этого заполняют водой до высоты $H_1=20$ см (рис. 32). Определите, на сколько градусов ΔT надо увеличить температуру воды в сосуде, чтобы стакан начал всплывать. Диаметр стакана $d=4$ см, первоначальная температура воды и воздуха $T_0=300$ К, атмосферное давление $p_0=720$ мм рт. ст. Тепловым расширением воды, материалов стакана и сосуда можно пренебречь.

ГЛАВА III

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

3.1. Определите, какую величину и во сколько раз надо изменить, чтобы при увеличении одного из зарядов в $n=4$ раза сила взаимодействия осталась прежней.

3.2. Два одноименно заряженных шарика массой $m=0{,}5$ г каждый подвешены в вакууме на тонких невесомых, нерастяжимых и непроводящих нитях одинаковой длины. Каждая из нитей образует с вертикалью угол $\alpha=30°$. Затем вся система погружается в непроводящую жидкость с плотностью, равной плотности материала шариков, и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=2$. Определите силу натяжения нитей T после погружения в жидкость.

3.3. Три точечных одноименных и одинаковых по численному значению свободных электрических заряда Q находятся в вершинах равностороннего треугольника. Определите, где нужно поместить заряд q, чтобы эта система зарядов находилась в равновесии. Определите знак и численное значение заряда q. Будет ли равновесие устойчивым?

3.4. В простейшей модели атома гелия два электрона вращаются вокруг ядра по круговой орбите радиусом $r=3\cdot10^{-11}$ м, располагаясь на противоположных концах диаметра орбиты. Определите скорость v движения электронов. Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, масса электрона $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.

3.5. Три одинаковых одноименных заряда $q=\sqrt{3}\cdot10^{-8}$ Кл, расположенные в вершинах правильного треугольника со стороной $a=25$ см, имеют массы $m=1$ г. В центр треугольника помещен противоположный им по знаку заряд $|Q|=q$. Определите угловую скорость ω движения зарядов вокруг оси, проходящей через центр треугольника и перпендикулярной его плоскости, при которой система зарядов находится в равновесии.

3.6. Три одинаковых шарика, несущие одинаковые одноименные заряды $q=5\cdot10^{-8}$ Кл, подвешены на трех невесомых непроводящих нитях длиной $l=50$ см, закрепленных в одной точке. Шарики вращаются вокруг вертикальной оси, проходящей через точку закрепления, с угловой скоростью $\omega=6$ с$^{-1}$. Определите массу шариков m, если нить образует с осью вращения угол $\alpha=60°$.

3.7. Один положительный и два отрицательных точечных заряда $Q=10^{-8}$ Кл расположены в вершинах равностороннего треугольника и связаны между собой непроводящими стержнями длиной $a=20$ см. В центре треугольника закрепляют положительный точечный заряд q (рис. 33), а для того, чтобы треугольник остался в равновесии, к заряду $+Q$ прикладывают уравновешивающую силу $\vec{R}$. Определите направление и числен-

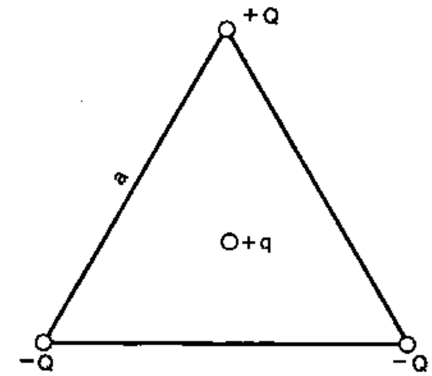


Рис. 33

ное значение силы $\vec{R}$, а также заряд q, если сила натяжения стержня, связывающего отрицательные заряды, обратилась в нуль. Определите изменение силы натяжения ΔT стержней, связывающих разноименные заряды после закрепления заряда q.

3.8. В центр тонкого проволочного кольца радиусом R, несущего электрический заряд q, помещен одноименный заряд Q. Считая, что $Q\gg q$, определите силу T, растягивающую кольцо.

3.9. Определите работу A_1 сил электростатического поля при перемещении заряда $q=20$ нКл из точки с потенциалом $\varphi_1=700$ В в точку с потенциалом $\varphi_2=200$ В, а также работу A_2 сил электростатического поля при перемещении заряда $q=20$ нКл из точки с потенциалом $\varphi_3=-100$ В в точку с потенциалом $\varphi_4=400$ В.

3.10. Определите работу A, которую надо совершить, чтобы четыре одинаковых электрических заряда $q=10^{-8}$ Кл расположить в вершинах квадрата со стороной $a=10$ см.

3.11. Протон и α-частица движутся по одной прямой навстречу друг другу. В тот момент, когда расстояние между частицами было велико, скорость протона была равна $v_1=3\cdot10^5$ м/с, а скорость α-частицы $v_2=10^5$ м/с. Определите, на какое наименьшее расстояние a смогут сблизиться эти частицы.

3.12. В некоторый момент времени протон и α-частица покоятся на расстоянии $a=10^{-9}$ м друг от друга. Затем они начинают удаляться друг от друга. Определите скорости частиц v_p и v_α в тот момент, когда расстояние между ними удвоится.

3.13. В некоторый момент времени три одноименно заряженных шарика покоятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a=18$ см. Заряд каждого шарика $q=8$ нКл, масса каждого шарика $m=2$ г. Шарики одновременно начинают двигаться. Определите скорости v шариков в тот момент, когда расстояния между ними удвоятся.

3.14. В некоторый момент времени четыре одноименных свободных заряженных шарика покоятся в вершинах квадрата со стороной $a=25$ см. Заряд каждого шарика $q=7$ нКл, масса каждого шарика $m=5{,}41$ г. Определите скорость v этих шариков, когда расстояния между ними удвоятся.

3.15. Металлический шар радиусом $r=1$ см, заряженный до потенциала $\varphi_0=300$ В, окружен незаряженной сферической проводящей оболочкой радиусом $R=3$ см, концентрической шару. Определите потенциалы шара φ и оболочки φ_R, если оболочку заземлить.

3.16. Двум металлическим шарикам радиусами $r_1=1$ см и $r_2=2$ см, соединенным тонким длинным проводником, сообщен заряд $Q=2{,}1\cdot10^{-8}$ Кл. Затем шарик радиусом r_1 помещают внутрь металлической заземленной сферы радиусом $R=3$ см так, что центры шарика и сферы совпадают. Проводник не касается сферы. Определите заряд Δq, прошедший по соединительному проводнику при помещении шарика внутрь сферы.

3.17. Определите емкость конденсатора, образованного двумя одинаковыми уединенными металлическими шариками радиусом $r=2$ см, расположенными в воздухе на расстоянии $l=27$ см друг от друга.

3.18. Определите заряд q батареи конденсаторов, изображенной на рисунке 34, если к клеммам AB приложено напряжение

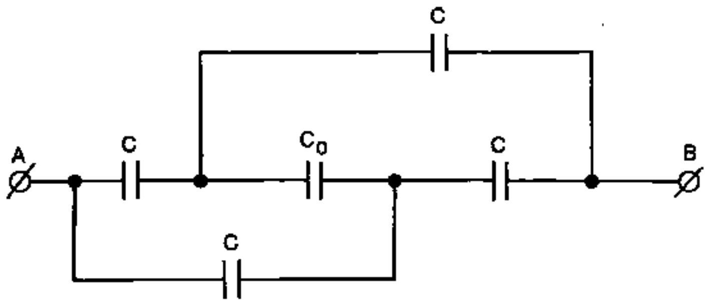


Рис. 34

$U=100$ В, а емкости конденсаторов $C=2$ мкФ и $C_0=1$ мкФ.

3.19. Конденсаторы емкостью $C_1=1$ мкФ и $C_2=2$ мкФ заряжены до разности потенциалов $\Delta\varphi_1=20$ В и $\Delta\varphi_2=50$ В соответственно. После зарядки конденсаторы соединили одноименными полюсами. Определите разность потенциалов $\Delta\varphi$ между обкладками конденсаторов после их соединения.

3.20. Два параллельно соединенных воздушных конденсатора емкостью $C_0=1$ мкФ каждый заряжены до напряжения $U_0=200$ В и отсоединены от источника ЭДС. После этого пространство между обкладками одного из конденсаторов полностью заполнили диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=7$. Определите заряды q_1, q_2 каждого из конденсаторов, напряжение U на конденсаторах и полную энергию W их электрического поля.

3.21. Два плоских воздушных конденсатора емкостью $C_0=2$ мкФ каждый соединены параллельно. Конденсаторы заряжают до разности потенциалов $U_0=300$ В и отсоединяют от источника ЭДС. Затем расстояние между обкладками одного из конденсаторов быстро увеличивают в $n=2$ раза, при этом заряд конденсатора не успевает измениться. Определите энергию W, перешедшую в тепло в процессе установления равновесия.

3.22. Три воздушных конденсатора емкостью $C_0=1$ мкФ каждый соединены последовательно. Конденсаторы отключены от источника ЭДС. Заряд этой батареи $q=10^{-4}$ Кл. Пространство между обкладками одного из конденсаторов полностью заполняют диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=2$. Определите энергию W, запасенную в электрическом поле этих конденсаторов, и напряжение U на зажимах батареи после заполнения конденсатора диэлектриком.

3.23. Плоский воздушный конденсатор емкостью $C=100$ пФ присоединен к источнику с ЭДС $\mathscr{E}=10$ В. Определите работу A, которую надо совершить, чтобы увеличить расстояние между пластинами в $n=2$ раза.

3.24. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено эбонитом с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=3$. Емкость конденсатора $C=600$ пФ. Конденсатор подключен к батарее с ЭДС $\mathscr{E}=300$ В. Определите, какую работу A нужно совершить, чтобы удалить эбонит из конденсатора. Трение между эбонитом и пластинами конденсатора отсутствует.

3.25. Определите заряды q_1 и q_2 на конденсаторах емкостью $C_1=2$ мкФ и $C_2=5$ мкФ (рис. 35), если $\mathscr{E}_1=10$ В, $\mathscr{E}_2=5$ В. Внутреннее сопротивление каждого источника $r=2$ Ом, сопротивление резистора $R=40$ Ом.

3.26. Определите напряжение U_1, U_2 на конденсаторах емкостью $C_1=1$ мкФ и $C_2=3$ мкФ (рис. 36), если $\mathscr{E}_1=4$ В, $\mathscr{E}_2=10$ В, $R_1=100$ Ом, $R_2=300$ Ом. Внутренние сопротивления источников не учитывайте.

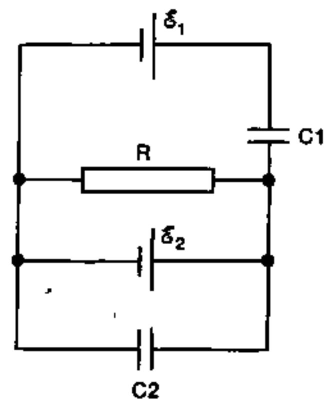


Рис. 35

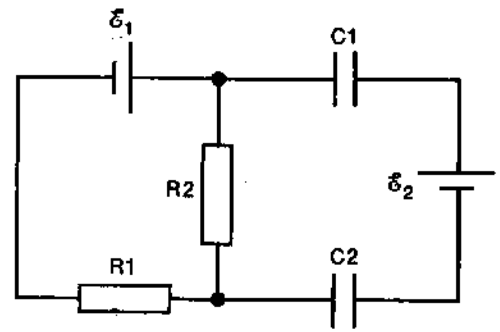


Рис. 36

3.27. Определите заряд q, прошедший через резистор сопротивлением R^* при замыкании ключа K (рис. 37). $R^*=R=20$ Ом, $\mathscr{E}=500$ В, $r=10$ Ом, $C=10$ мкФ.

3.28. Определите заряды q_1, q_2 и q_3 каждого из конденсаторов (рис. 38). $\mathscr{E}=120$ В, $C_1=1$ мкФ, $C_2=3$ мкФ, $C_3=2$ мкФ, $R_1=100$ Ом, $R_2=300$ Ом. Внутренним сопротивлением источника можно пренебречь.

3.29. В схеме, изображенной на рисунке 39, внутренние сопротивления всех источников одинаковы и равны $r=1$ Ом. ЭДС источников $\mathscr{E}_1=1{,}5$ В и $\mathscr{E}_2=2$ В, сопротивление резистора $R=33$ Ом, емкость конденсатора $C=1$ мкФ. Определите заряд конденсатора.

3.30. Определите напряжения на конденсаторах (рис. 40) U_1, U_2. $C_1=2$ мкФ, $C_2=3$ мкФ, $\mathscr{E}_1=3$ В, $\mathscr{E}_2=8$ В. Внутренние сопротивления источников не учитывайте.

3.31. Определите напряжение на зажимах батареи в схеме, изображенной на рисунке 41. ЭДС батареи $\mathscr{E}=16$ В, внутреннее сопротивление $r=5$ Ом, сопротивления резисторов $R_0=100$ Ом.

3.32. В схему (рис. 42) включены два микроамперметра и два одинаковых вольтметра. Показания микроамперметров $I_1=100$ мкА и $I_2=99$ мкА. Показание вольтметра $V1$ $U_1=10$ В. Определите показание вольтметра $V2$. Сопротивлением проводов можно пренебречь.

3.33. В схеме (рис. 43) амперметр показывает силу тока $I=1$ А, а стрелка вольтметра стоит на нуле. Считая, что сопротивление вольтметра бесконечно велико, а сопротивление амперметра мало, определите внутренние сопротивления r_1 и r_2 источников тока, если их ЭДС соответственно равны $\mathscr{E}_1=1{,}5$ В и $\mathscr{E}_2=3$ В.

3.34. Две батареи с ЭДС $\mathscr{E}_1=5$ В и $\mathscr{E}_2=2$ В и внутренними сопротивлениями $r_1=20$ Ом и $r_2=10$ Ом замкнуты проводником AB (рис. 44), сопротивление которого бесконечно мало. Определите силу тока I через проводник AB. Сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь.

3.35. Определите показания амперметра в схеме (рис. 45). ЭДС источников равны $\mathscr{E}_1=2$ В и $\mathscr{E}_2=6$ В, а их внутренние сопротивления одинаковы и равны $r=5$ Ом. Внутреннее сопротивление амперметра равно нулю.

3.36. При электролизе раствора медного купороса на катоде за некоторое время выделилась медь массой $m=2$ г при силе тока $I=0{,}25$ А. Расстояние между прямоугольными электродами $l=30$ см, площадь погруженной в электролит части электрода $S=50$ см^2. Определите изменение расхода энергии ΔQ, требуемой для получения того же количества меди при той же силе тока через ванну, если расстояние между электродами увеличить в $n_1=2$ раза, а глубину погружения электродов увеличить в $n_2=4$ раза. Удельное сопротивление раствора $\rho=0{,}33$ Ом·м, электрохимический эквивалент меди $k=3{,}3\cdot10^{-7}$ кг/Кл.

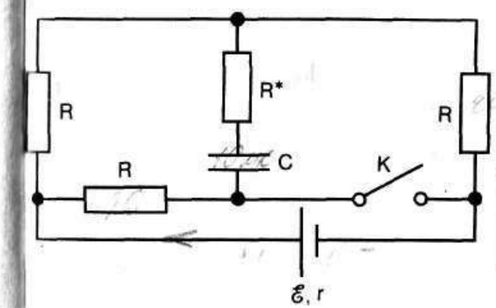


Рис. 37

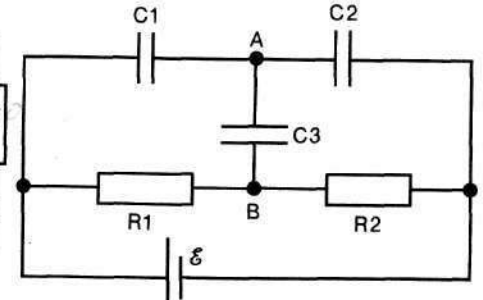


Рис. 38

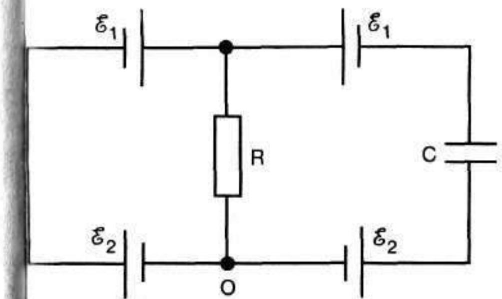


Рис. 39

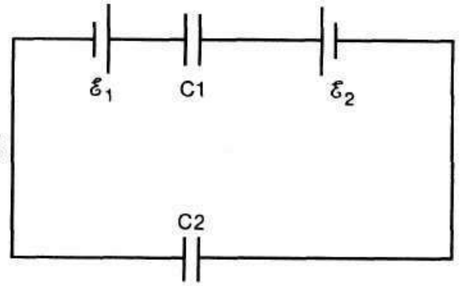


Рис. 40

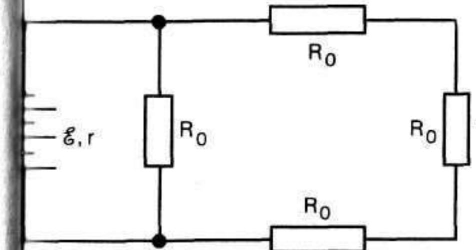


Рис. 41

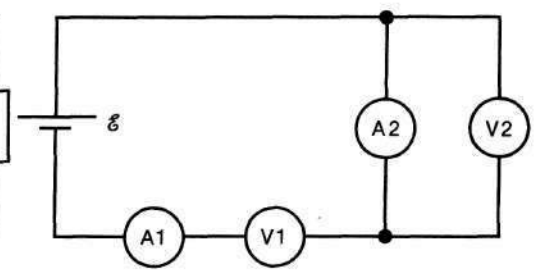


Рис. 42

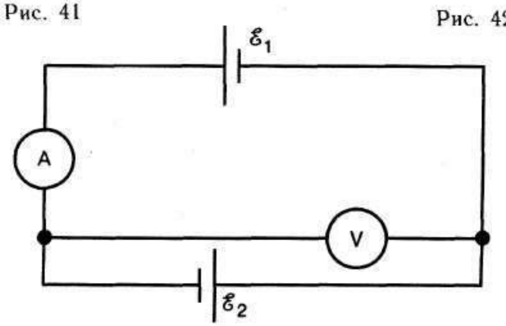


Рис. 43

2 Заказ 227

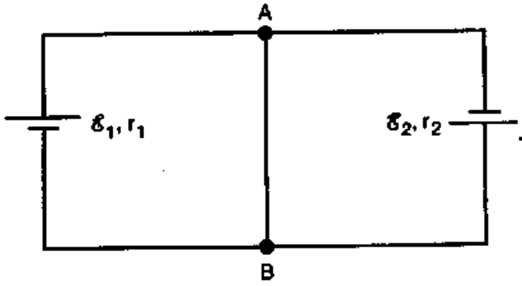


Рис. 44

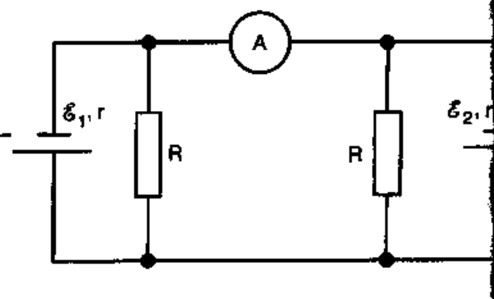


Рис. 45

3.37. Электроэнергия передается от генератора к потребителю по проводам, общее сопротивление которых $r=400$ Ом. Коэффициент полезного действия линии передачи $\eta=0,95$. Определите сопротивление нагрузки R. Внутреннее сопротивление генератора $r_г=100$ Ом.

3.38. Три лампочки мощностью $P_{01}=50$ Вт, $P_{02}=25$ Вт и $P_{03}=50$ Вт, рассчитанные на напряжение $U_0=110$ В каждая, соединены, как показано на рисунке 46, и включены в сеть напря-

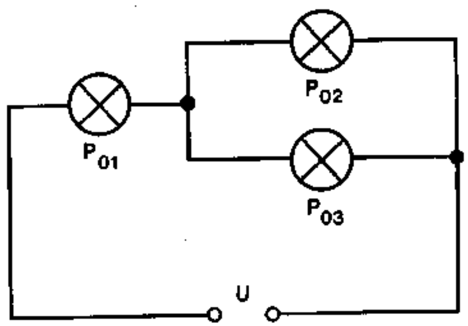


Рис. 46

жением $U=220$ В. Определите мощности P_1, P_2, P_3, выделяющиеся в каждой лампочке.

3.39. Электромотор подключен к батарее с ЭДС $\mathscr{E}=24$ В. Сопротивление подводящих проводов $r=1$ Ом. При работе мотора с нагрузкой напряжение на его клеммах на $n=20\%$ меньше, чем напряжение на них при холостом ходе. Сила тока при нагрузке $I=5$ А. Определите, во сколько раз мощность, отбираемая от батареи нагруженным мотором, больше мощности, отбираемой мотором, работающим вхолостую. Внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь.

3.40. Мощность, развиваемая на валу электродвигателя, $N=1$ кВт, его коэффициент полезного действия $\eta=80\%$. Двигатель питается от сети напряжением $U=220$ В, сопротивление

его обмотки $R=4$ Ом. Определите мощность $P_м$, расходуемую на преодоление сил трения в механических частях электродвигателя. Потерями, связанными с наличием вихревых токов, можно пренебречь.

3.41. Вагон метрополитена массой $m=25$ т отходит от станции и движется в гору с ускорением $a=0,6$ м/с^2. Уклон горы $\alpha=0,03$. Определите силу тока I, который будет протекать через обмотку электродвигателя, когда вагон пройдет путь $s=0,5$ км. Коэффициент сопротивления движению $k=0,01$, напряжение в линии $U=2,5$ кВ, КПД $\eta=0,8$.

3.42. Определите коэффициент полезного действия η солнечной батареи, если на нее падает световой поток мощностью $P_0=1$ мкВт. Внутреннее сопротивление батареи $r=20$ кОм. Батарея вырабатывает ЭДС $\mathscr{E}_0=2\cdot10^5$ В на каждый Вт падающей на нее световой мощности. Батарея нагружена так, что во внешней цепи рассеивается максимальная мощность.

3.43. По медной проволоке площадью сечения $S=0,1$ мм^2 начинают пропускать прямоугольные импульсы тока амплитудой $I=10$ А и длительностью $t_0=100$ мкс с частотой $f=1$ кГц (рис. 47). Определите время t, за которое проволока нагреется

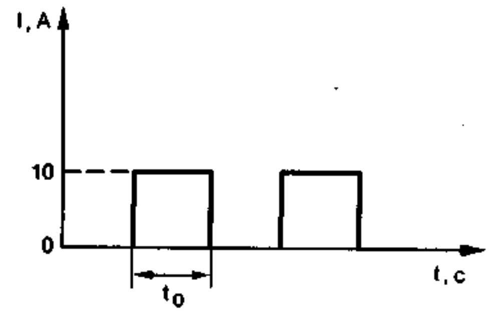


Рис. 47

на $\Delta T=100$ К. Считайте, что сопротивление проволоки не зависит от температуры. Теплоотводом можно пренебречь.

3.44. Схема питания гелий-неонового лазера, генерирующего световой поток мощностью $P=30$ мВт, изображена на рисунке 48. Вольтметр показывает напряжение $U=2$ кВ, миллиамперметр — силу тока $I=50$ мА. Внутреннее сопротивление источника $r=20$ кОм. Определите КПД η лазерной установки.

3.45. Электрон, движущийся со скоростью $v=10^7$ м/с, влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B=2$ Тл под углом $\alpha=60°$ к линиям магнитной индукции. Определите шаг винтовой траектории электрона.

3.46. Атом водорода попадает в магнитное поле, направленное перпендикулярно плоскости электронной орбиты. Определите изменение частоты $\Delta\nu$ электрона на орбите. Индукция магнит-

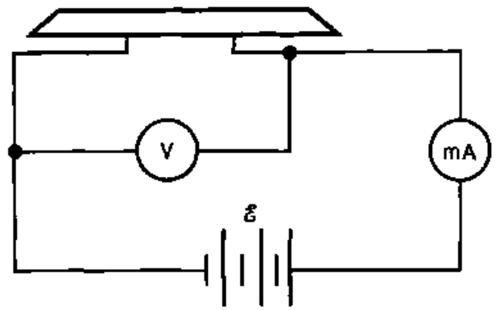


Рис. 48

ного поля $B=1$ Тл. Считайте, что в магнитном поле изменяется скорость движения электрона по орбите и не изменяется ее радиус. При решении задачи используйте приближение $v^2-v_0^2\approx 2v_0\Delta v$.

3.47. Электрон, двигаясь с постоянной скоростью, влетает в некоторую область пространства, где имеются однородные статические электрическое и магнитное поля, силовые линии которых параллельны друг другу. В начальный момент времени скорость электрона перпендикулярна силовым линиям. Вектор магнитной индукции $B=1$ Тл. Определите напряженность E электрического поля, если известно, что, сделав $n=40$ витков спирали, электрон сместился вдоль поля на расстояние $S=1{,}8$ см.

3.48. Определите максимальную скорость изменения индукции магнитного поля $\Delta B/\Delta t$, если на концах намотки рамки, помещенной в это поле, возникает переменное напряжение с амплитудным значением $\mathscr{E}_{max}=0{,}01$ В. Рамка имеет площадь $S=2$ см^2 и количество витков $n=40$. Нормаль к плоскости рамки составляет с направлением магнитного поля угол $\alpha=60°$.

3.49. Рамка площадью $S=20$ см^2, имеющая $n=1000$ витков, вращается с частотой $f=50$ Гц в однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}1$ Тл вокруг оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярной линиям магнитной индукции. Определите максимальную ЭДС $\mathscr{E}_{max}$, индуцируемую в рамке.

3.50. В замкнутую накоротко катушку из медной проволоки вводят магнит, создающий внутри ее поле $B=10^{-2}$ Тл. Определите заряд q, протекающий при этом через катушку. Радиус витка катушки $r=10$ см, площадь поперечного сечения проволоки $S=0{,}1$ мм^2.

3.51. Электромотор питается от батареи с ЭДС $\mathscr{E}=12$ В. Определите механическую работу A, совершаемую мотором за время $t=1$ с, если сила тока, протекающего по его обмотке, $I=2$ А. При полном затормаживании якоря сила тока в цепи $I_0=3$ А.

3.52. На горизонтальный вал мотора равномерно наматывается нитка, на которой подвешен груз массой $m=0{,}8$ кг. Мотор питается от аккумулятора с ЭДС $\mathscr{E}=12$ В. Сопротивление цепи мотора $r=3{,}4$ Ом. Радиус вала мотора $a=0{,}5$ см. Определите число оборотов n в секунду якоря и ЭДС индукции $\mathscr{E}_{инд}$, возникающую в нем, если сила тока, текущего по обмоткам мотора, $I=3{,}3$ А.

3.53. В катушке индуктивности сила тока линейно увеличивается со скоростью $\frac{\Delta I}{\Delta t}=10$ А/с. Определите ЭДС индукции $\mathscr{E}_{инд}$, возникающую при этом в катушке. Резонансная частота колебательного контура, образованного из этой катушки и конденсатора емкостью $C=100$ пФ, равна $\nu=100$ кГц.

ГЛАВА IV
ОПТИКА

4.1. При переходе света из воздуха в стекло угол падения равен $\alpha = 50°$, а угол преломления $\beta = 30°$. Определите скорость света в стекле.

4.2. Определите угол падения луча на поверхность воды из воздуха, если известно, что он больше угла преломления на 10°. Показатель преломления воды $n = \frac{4}{3}$.

4.3. Луч света падает на плоскопараллельную стеклянную пластинку под углом $\alpha = 45°$. Постройте ход лучей в пластинке с учетом многократных отражений и преломлений на границах стекло — воздух и воздух — стекло. Определите, на каком расстоянии находятся соседние лучи, отраженные и выходящие из точек верхней поверхности пластинки. Толщина пластинки $a = 1$ см, показатель преломления стекла $n = 1{,}41$.

4.4. Луч света падает на боковую грань равнобедренной призмы. Преломленный луч проходит внутри призмы параллельно ее основанию, а отраженный составляет с ним угол, равный 90°. Определите угол φ при вершине призмы. Показатель преломления материала призмы $n = 1{,}5$.

4.5. Луч света падает на основание прямоугольной призмы перпендикулярно основанию (рис. 49). Определите угол γ между падающим лучом и лучом, вышедшим из призмы. Угол при вершине призмы $\varphi = 30°$. Показатель преломления материала призмы $n = 1{,}5$.

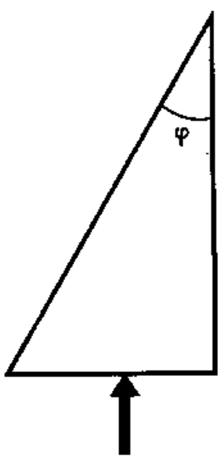


Рис. 49

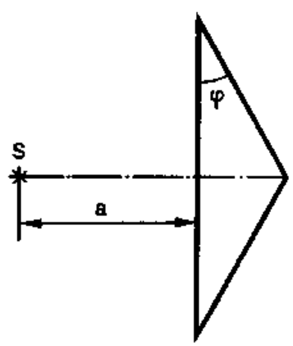


Рис. 50

4.6. В опытах по интерференции света для получения двух когерентных источников используется тонкая бипризма Френеля с преломляющим углом $\varphi = 5{,}7°$, изготовленная из стекла (рис. 50). Определите расстояние между когерентными источниками, если точечный источник света S находится на расстоянии $a = 10$ см от бипризмы. Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

4.7. Равнобедренная стеклянная призма с малыми преломляющими углами $\alpha = 3°$ помещена в пучок параллельных лучей, падающих нормально на ее основание (рис. 51). Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$, размер основания призмы $2a = 5$ см. Определите, на каком расстоянии l от призмы нужно расположить плоский экран, перпендикулярный световым лучам, падающим на призму, чтобы в его середине образовалась темная полоса шириной $2d = 1$ см.

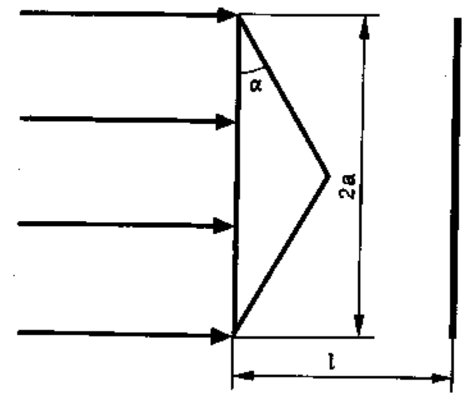


Рис. 51

4.8. В сосуд налили жидкость с абсолютным показателем преломления $n_1 = \sqrt{2}$, а сверху налили жидкость с абсолютным показателем преломления $n_2 = \sqrt{3}$. Жидкости не перемешиваются. На дно сосуда поместили точечный источник света. Определите, под каким углом к вертикали луч выйдет из жидкостей, если этот луч падает на границу раздела жидкостей под углом $\alpha = 60°$.

4.9. В сосуд налита жидкость с абсолютным показателем преломления n_1, а сверху другая жидкость. Жидкости не перемешиваются. На дно сосуда помещен точечный источник света, луч от которого падает на границу раздела жидкостей под углом $\alpha = 60°$. Определите, при каком показателе преломления n_1 луч на границе с воздухом испытывает полное внутреннее отражение.

4.10. Луч света падает на стеклянную призму ABC ($AB = BC$) перпендикулярно грани AB (рис. 52). Показатель преломления

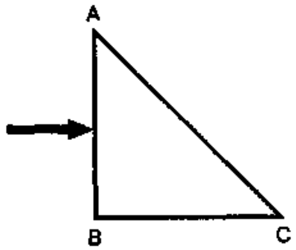


Рис. 52

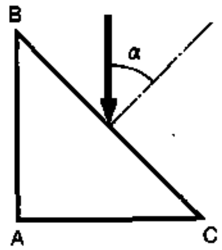


Рис. 53

стекла $n=\sqrt{1,5}$. Определите угол между лучами, вышедшими из призмы.

4.11. Луч света падает на прямоугольную стеклянную призму ABC ($AC=AB$) под углом $\alpha=45°$ к грани BC (рис. 53). Показатель преломления стекла $n=\sqrt{2}$. Определите, какой угол γ с нормалью к грани AC образует луч, вышедший из призмы через эту грань.

4.12. Луч света падает на стеклянную призму ABC ($AB=BC$) перпендикулярно грани AB (см. рис. 52). Определите дальнейший ход луча. Рассмотрите призмы с показателями преломления $n_1=1,2$ и $n_2=1,6$.

4.13. Луч света от точечного источника S, расположенного на поверхности стеклянной полусферы, падает на плоское зеркало в точку его касания с полусферой под углом $\alpha=30°$ (рис. 54). Радиус сферы $R=10$ см. Показатель преломления стекла $n=1,5$. Определите длину пути луча внутри полусферы.

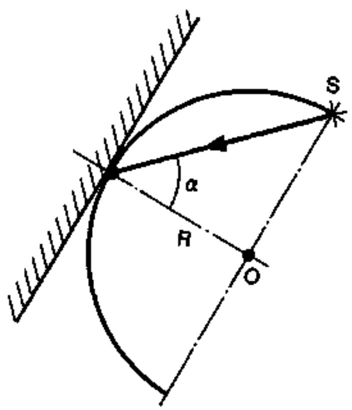


Рис. 54

4.14. Луч света падает на плоскопараллельную пластинку под углом $\alpha=45°$. Определите толщину d плоскопараллельной пластинки, если смещение луча после выхода из пластинки равно $s=2$ см. Абсолютный показатель преломления вещества пластинки $n=1,8$.

4.15. Луч света падает на плоскопараллельную пластинку толщиной $d=3$ см под углом $\alpha=60°$. Определите оптическую длину пути луча в плоскопараллельной пластинке. Абсолютный показатель преломления вещества пластинки $n=1,5$.

4.16. На дно сосуда, наполненного водой до высоты $H=15$ см, помещен точечный источник света. Определите наименьший диаметр непрозрачной пластинки, которую надо поместить на поверхности воды над источником света, чтобы свет не выходил из сосуда. Абсолютный показатель преломления воды $n=\frac{4}{3}$.

4.17. Линза дает увеличение предмета $\Gamma=3$. Предмет находится на расстоянии $d=40$ см от линзы. Определите фокусное расстояние линзы.

4.18. Линза дает увеличение предмета $\Gamma=2$. Определите, на каком расстоянии от линзы находится предмет. Оптическая сила линзы $D=20$ дптр.

4.19. Расстояние от предмета до экрана $L=105$ см. Линза, расположенная между ними, дает на экране увеличенное изображение. Если линзу переместить на расстояние $l=32$ см, то на экране будет уменьшенное изображение. Определите фокусное расстояние линзы.

4.20. Между неподвижным предметом и экраном передвигают линзу. При этом получают резкие изображения предмета размерами $h_1=9$ см и $h_2=16$ см. Определите размер предмета.

4.21. Расстояние от предмета до экрана $L=5$ м. Определите оптическую силу линзы и расстояние от линзы до предмета, чтобы с ее помощью можно было получить изображение предмета на экране, увеличенное в $\Gamma=4$ раза.

4.22. Определите размер изображения стержня, полученного с помощью рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F=12$ см. Стержень лежит на главной оптической оси линзы, причем один конец стержня расположен в фокусе. Длина стержня $l=12$ см.

4.23. Действительное изображение предмета, полученное с помощью собирающей линзы, находится от нее на расстоянии $f_1=80$ см. Собирающую линзу заменяют на рассеивающую с таким же фокусным расстоянием. Изображение в этом случае находится на расстоянии $f_2=20$ см от линзы. Определите фокусное расстояние линз и увеличение в каждом случае.

4.24. На расстоянии $d=80$ см от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F=20$ см на ее главной оптической оси находится точечный источник света. Линзу передвинули на $a=2$ см в направлении, перпендикулярном главной оптической оси. Определите, куда и насколько надо передвинуть источник, чтобы его изображение оказалось на прежнем месте.

4.25. Небольшому шарику, который находится на поверхности горизонтально расположенной линзы, сообщили вертикальную скорость $v_0=10$ м/с. Определите, в течение какого времени τ будет существовать действительное изображение шарика в этой линзе. Оптическая сила линзы $D=0{,}5$ дптр. Ускорение свободного падения $g\approx 10$ м/с^2.

4.26. Предмет помещен на расстоянии $d=4F$ от линзы. Определите, во сколько раз изображение предмета на экране меньше самого предмета.

4.27. Объектив фотоаппарата имеет фокусное расстояние $F=5$ см. Определите, на каком расстоянии от объектива должен быть помещен предмет, чтобы снимок получился в $\frac{1}{9}$ натуральной величины.

4.28. Определите фокусное расстояние линзы, склеенной из двух стекол очков дальнозоркого человека, если расстояние наилучшего зрения для одного его глаза $d_1=50$ см. а для другого $d_2=100$ см.

4.29. Определите, сколько очковых линз с оптической силой $D=+2$ дптр следует сложить вместе, чтобы получить лупу с увеличением $\Gamma=3$.

4.30. Две тонкие линзы, собирающая с фокусным расстоянием $F_1=10$ см и рассеивающая с фокусным расстоянием $F_2=-15$ см, расположены вплотную друг к другу так, что их главные оптические оси совпадают. Диаметр рассеивающей линзы меньше диаметра собирающей линзы. На расстоянии $d=50$ см от линз на главной оптической оси системы находится точечный источник света. Определите расстояние между изображениями источника.

4.31. Точечный источник света расположен на расстоянии $d=(3/2)F$ справа от собирающей линзы на ее главной оптической оси. Слева от линзы на расстоянии $a=(7/4)F$ расположено плоское зеркало, плоскость которого перпендикулярна главной оптической оси линзы. Определите расстояние l между действительным и мнимым изображениями источника. Фокусное расстояние линзы $F=50$ см.

4.32. Экран расположен в фокальной плоскости собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=10$ см. По другую сторону линзы в ее фокусе находится точечный источник света, который начинает удаляться от линзы с ускорением $a=4$ м/с^2. Определите, через какое время после начала движения радиус светлого пятна на экране уменьшится в $n=6$ раз.

4.33. Стеклянная двояковыпуклая линза с преломляющими поверхностями, имеющими одинаковый радиус кривизны $R=21$ см, помещена на границе раздела двух сред с абсолютными показателями преломления $n_1=1{,}3$ и $n_2=1{,}6$ (рис. 55). Абсолютный показатель преломления стекла $n=1{,}8$. Определите фокусные расстояния линзы.

4.34. Тонкая двояковыпуклая стеклянная линза имеет сфери-

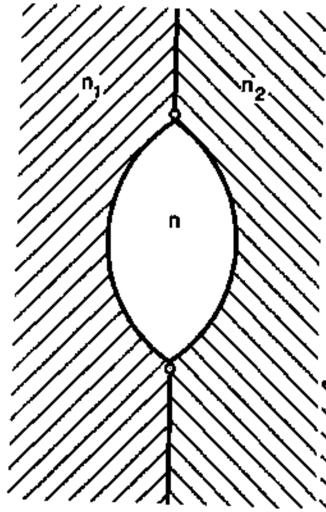


Рис. 55

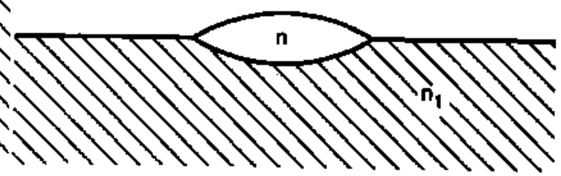


Рис. 56

ческие преломляющие поверхности с одинаковым радиусом кривизны $R=67$ мм и расположена на границе раздела двух сред: воздуха и воды (рис. 56). Определите фокусные расстояния линзы. Абсолютный показатель преломления стекла $n=1{,}5$, воды $n_1=1{,}33$.

4.35. Точечный источник света S расположен на расстоянии $d=F$ справа от рассеивающей линзы на ее главной оптической оси. Слева от линзы на расстоянии $a=2F$ расположено плоское зеркало, плоскость которого перпендикулярна главной оптической оси линзы. Фокусное расстояние линзы F. Сколько изображений источника формирует данная оптическая система? Определите расстояния от линзы до этих изображений.

4.36. Для рассматривания удаленных предметов часто применяется труба Галилея (например, в театральном бинокле). Труба Галилея (рис. 57) состоит из объектива, в качестве которого используется собирающая длиннофокусная линза ($F_{об}=100$ см), и

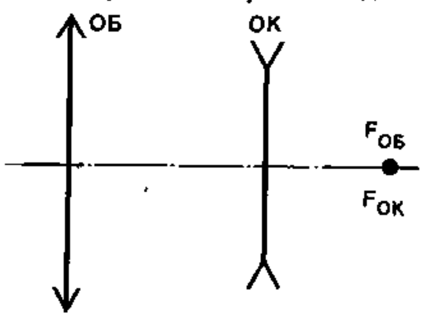


Рис. 57

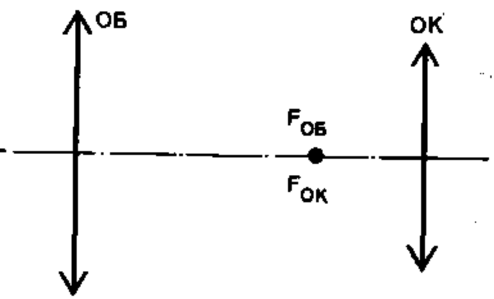


Рис. 58

короткофокусного окуляра (рассеивающая линза) ($F_{ок}=8$ см). Линзы расположены так, что их фокусы совпадают. Какое изображение дает труба Галилея? Определите увеличение трубы.

4.37. Для рассматривания удаленных предметов служит труба Кеплера, оптическая схема которой представлена на рисунке 58. Объектив и окуляр являются собирающими линзами и расположены так, что их фокусы совпадают. Какое изображение дает труба Кеплера? Определите увеличение трубы. $F_{об}=800$ мм, $F_{ок}=50$ мм.

4.38. Зрительная труба состоит из объектива с фокусным расстоянием $F=50$ см и окуляра, через который изображение, сформированное объективом, рассматривается как в лупу. Первоначвльно зрительная труба была установлена на бесконечность. Определите расстояние, на которое надо передвинуть окуляр, чтобы рассматривать предметы, удаленные на расстояние $d=50$ м от трубы.

4.39. Фокусное расстояние объектива микроскопа $F_1=1$ см, фокусное расстояние окуляра микроскопа $F_2=3$ см. Расстояние между объективом и окуляром $l=160$ мм. Определите разрешающую способность этого микроскопа (т. е. наименьшее расстояние между двумя точками, которые еще можно различить). Разрешающая способность глаза примерно равна одной минуте.

4.40. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием F лежит на плоском зеркале (рис. 59). Определите, на каком расстоянии s от линзы нужно поместить иголку OA, чтобы изображение иголки OA_1 явилось ее продолжением.

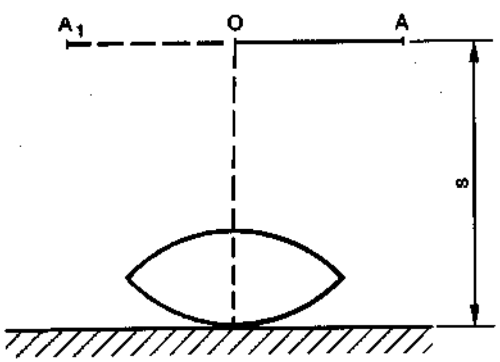


Рис. 59

4.41. Пространство между двумя стеклянными линзами заполнено водой (рис. 60). Одна из линз двояковогнутая с радиусом кривизны преломляющих поверхностей $R_2=30$ см. Вторая линза двояковыпуклая с радиусом кривизны преломляющих поверхностей $R_1=20$ см. Определите фокусное расстояние этой оптической системы. Считайте линзы и слой воды между ними тон-

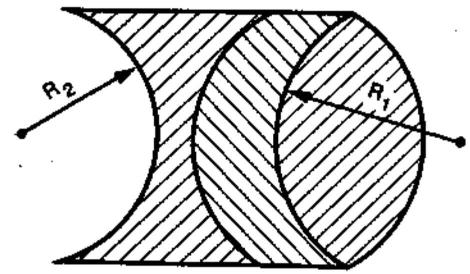


Рис. 60

кими. Абсолютный показатель преломления стекла $n_1=1{,}5$, воды $n_2=1{,}33$.

4.42. Параллельный пучок световых лучей разлагается в спектр тонкой призмой, преломляющий угол которой $\varphi=8°$, а затем фокусируется на экран, расположенный в фокальной плоскости собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=60$ см. Определите разность значений показателей преломления n материала призмы для красного и зеленого света, если расстояние между красным и зеленым изображениями на экране $l=1$ мм.

4.43. Для устранения хроматической аберрации (зависимости фокусного расстояния линзы от длины волны света) склеивают двояковыпуклую линзу радиусом кривизны сферических преломляющих поверхностей $R_1=100$ мм и двояковогнутую линзу радиусом кривизны $R_2=200$ мм. Показатель преломления стекла и собирающей линзы для красного света $n_{1к}=1{,}51$, для синего $n_{1с}=1{,}53$. Определите дисперсию ($\Delta n_2=n_{2с}-n_{2к}$) материала, из которого изготовлена рассеивающая линза.

4.44. Работа выхода электронов из цинка $A=5{,}6\cdot10^{-19}$ Дж. Возникает ли фотоэффект под действием излучения длиной волны $\lambda_1=0{,}33$ мкм, $\lambda_2=0{,}20$ мкм? Постоянная Планка $h=6{,}67\cdot10^{-34}$ Дж·с.

4.45. Работа выхода электронов для натрия $A=3{,}65\cdot10^{-19}$ Дж. Определите длину волны излучения, соответствующей красной границе фотоэффекта для натрия.

4.46. В эксперименте по определению постоянной Планка h было обнаружено, что фотоэлектроны, вырываемые с поверхности некоторого металла светом с частотой $\nu_1=2{,}2\cdot10^{15}$ Гц, полностью задерживаются обратным (задерживающим) потенциалом $U_1=6{,}6$ В, а вырываемые светом с частотой $\nu_2=4{,}6\cdot10^{15}$ Гц — напряжением $U_2=16{,}5$ В. Определите постоянную Планка из данных опыта. Заряд электрона $|e|=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

4.47. Измерение зависимости задерживающего потенциала (напряжения, при котором фототок обращается в нуль) от длины волны света, освещающего исследуемый материал, производится по схеме, показанной на рисунке 61. При исследовании цезия были получены следующие результаты: при освещении светом длиной волны $\lambda_1=0,4$ мкм задерживающий потенциал $U_1=1,19$ В, длиной волны $\lambda_2=0,5$ мкм $U_2=0,57$ В. Определите красную границу фотоэффекта для цезия и постоянную Планка по результатам опыта. Заряд электрона $|e|=1,6\cdot10^{-19}$ Кл.

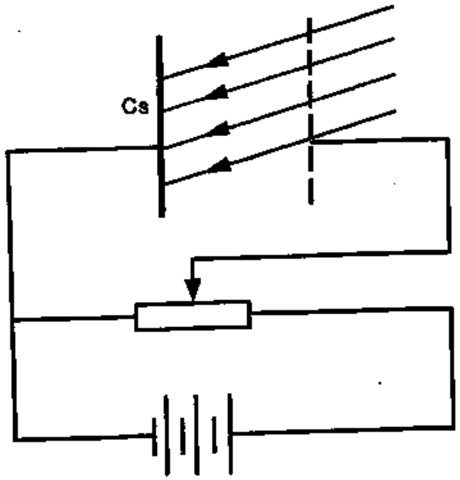


Рис. 61

4.48. Определите значение тока насыщения для фотоэлемента с цезиевым катодом. Фотоэлемент освещается излучением лазера мощностью $N=1$ мВт. Задерживающая разность потенциалов для этого излучения равна $U=0,07$ В. Красная граница фотоэффекта для цезия $\lambda_{кр}=0,65$ мкм.

4.49. Определите максимальное число n электронов, которые можно удалить с уединенного цинкового шарика радиусом $R=2$ см, если его облучить монохроматическим светом длиной волны $\lambda=324$ нм. Работа выхода для цинка $A=3\cdot10^{-19}$ Дж. Заряд электрона $|e|=1,6\cdot10^{-19}$ Кл. Постоянная Планка $h=6,62\cdot10^{-34}$ Дж·с. $\varepsilon_0=8,85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

УКАЗАНИЯ

I. МЕХАНИКА

1.1. При решении этой задачи обычно возникают математические трудности. Вспомните, что скорость определяется как производная по времени от функции координаты, а ускорение — как производная по времени от функции скорости. Но вы забыли это определение или забыли, как надо взять производные. Что делать? Запишите основные два уравнения:

$$\vec{s}=\vec{s}_0+\vec{v}_0t+\frac{\vec{a}}{2}t^2, \qquad (1)$$

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t. \qquad (2)$$

В момент времени, когда скорость равна нулю, s и есть пройденный путь.

1.2. Внимательно изучите график. На промежутке $0\leqslant t\leqslant 4$ с ускорение постоянно и положительно; следовательно, его направление совпадает с направлением выбранной системы координат, площадь под графиком определяет приращение скорости. Для промежутка времени 4 с$\leqslant t\leqslant 8$ с движение равнозамедленное — ускорение отрицательно. Составьте уравнения зависимости скорости и координаты от времени, руководствуясь соотношениями (1) и (2). Не забудьте при этом о выборе начала отсчета времени. Вспомните также, что путь определяется площадью под графиком зависимости скорости от времени; суммируйте все площади и над осью времени, и под осью времени.

1.3. Воспользуйтесь указанием к задаче 1.2.

1.4. Выберите систему координат, взяв за начало отсчета точку бросания; ось OX — горизонтально направленную вдоль движения вагона, ось OY — вертикально вверх или вниз, как вам больше нравится. Запишите уравнения движения в проекциях на выбранные оси. Внимательно следите за правильным выбором знаков проекций, для этого обязательно в выбранной системе отсчета нарисуйте все векторы, определяющие движение.

1.5. Выберите горизонтальную ось OX — вдоль нее движение равномерное с начальной скоростью $v_0\cos\alpha$ — и вертикальную ось OY — по ней движение равнопеременное с начальной скоростью $v_0\sin\alpha$ и ускорением $a_y=-g$. Запишите уравнения движения по этим осям. Время движения определите из второго уравнения. Далее учтите, что без учета сопротивления воздуха время подъема равно времени падения и в два раза меньше всего времени движения. Из полученных уравнений выведите математическую связь заданного времени и искомой высоты.

1.6. В этой задаче движение только вдоль одной оси — оси

OY — движение равнопеременное с начальной скоростью и ускорением свободного падения.

В условии этой задачи есть неточность — не сказано, относительно какого нулевого уровня выбирается значение потенциальной энергии. Выбирайте сами! Правда, лучше выбрать уровень начала движения. Вспомните формулы для кинетической энергии ($mv^2/2$) и потенциальной энергии в поле тяжести Земли (mgh, где h — расстояние от выбранного нулевого уровня).

1.7. Задачу можно решать, записывая уравнения свободного падения тел. Помните, что путь — это разность координат.

Можно задачу решить графически. Постройте график зависимости скорости от времени для свободного (равноускоренного) падения. Площадь под графиком определяет пройденный путь. Остается вспомнить математическую запись площади треугольника и площади трапеции. Сравните площади, следовательно, и пути за указанные в задаче интервалы времени.

1.8. Воспользуйтесь указанием к задаче 1.7.

1.9. В этой задаче рассматривается движение двух тел, но вдоль одной и той же оси. Составьте уравнения для каждого тела, не забудьте, что одно из них до столкновения двигалось больше времени. Равенство координат — условие встречи тел. Можно рассматривать движение одного тела относительно другого.

1.10. Использование закона сохранения механической энергии позволит легко решить эту задачу. Начальная энергия — только кинетическая $E_{\text{ко}}=\frac{mv_0^2}{2}$, полная механическая энергия в верхней точке траектории $E=E_{\text{п}}+E_{\text{к}}$,

$$E_{\text{п}}=mgh;\ E_{\text{к}}=\frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2}.$$

1.11. Покажите на рисунке направление горизонтальной, вертикальной и полной скоростей тела в начальный момент времени и в искомый момент времени. Учтите, что горизонтальная составляющая скорости не изменяется, а вертикальная увеличивается с течением времени. Вспомните определение тангенса угла и из треугольника скоростей получите уравнение для времени. Изменение потенциальной энергии определите из закона сохранения энергии или как работу силы тяжести за указанный промежуток времени.

1.12. Наибольшую высоту подъема определите или из уравнения движения, или из закона сохранения энергии (см. задачу 1.10). Изменение импульса определите как разность векторов конечного и начального импульсов. Внимание! Не забывайте о векторном характере импульса. Можно воспользоваться вторым законом Ньютона, записанным в виде $\vec{F}\Delta t=\Delta\vec{p}$. Изменение импульса системы равно импульсу внешней силы. Этой силой является сила тяжести.

1.13. Катер участвует в двух движениях: по течению реки он движется равномерно, а перпендикулярно течению относительно воды его движение равноускоренное.

1.14—1.17. Во всех этих задачах необходимо воспользоваться принципом относительности движения, рассматривая движение одного тела относительно другого или относительно Земли. Вспомните правило сложения скоростей: скорость тела относительно неподвижной системы отсчета равна векторной сумме скорости тела относительно подвижной системы отсчета и скорости этой подвижной системы относительно неподвижной. Помните о векторном характере скоростей. Если вам трудно запомнить такие «сложные» закономерности, вспомните простое правило сложения скоростей для лодки, переплывающей реку: течение ее сносит вдоль берега, а рулевой стремится переправиться на противоположный берег. И тогда любая задача, связанная с относительностью движения, будет вами решена.

1.18. После построения векторов скоростей учтите, что наименьшее расстояние между лодками будет определяться перпендикуляром из точки A на направление относительной скорости для лодки, выходящей из пункта B.

Для того чтобы это понять, мысленно остановите лодку в пункте A, тогда вторая лодка должна двигаться в направлении относительной скорости, это ее перемещение, а наименьшее расстояние есть перпендикуляр, опущенный из точки на выбранное направление!

1.19. Выберите оси координат по течению реки и в перпендикулярном направлении. Запишите уравнения движения по обеим осям. Решите полученную систему.

1.20, 1.17. Выберите систему отсчета, связанную с Землей, и составьте уравнения движения для снаряда и самолета. Равенство соответствующих координат и означает момент столкновения.

При решении предыдущих задач не рассматривались причины возникновения движения. В задачах 1.21—1.50 необходимо выяснить причины возникновения движения или покоя, другими словами, для решения задач использовать законы Ньютона. Прежде всего нужно правильно определить силы, действующие на рассматриваемое тело. Силы — результат взаимодействия между рассматриваемым телом и другими телами! Это взаимодействие может привести к движению или к возникновению деформаций. Обязательно сделайте чертеж сил, действующих на каждое тело, рассматриваемое в задаче, т. е. от системы тел перейдите к системе сил.

После определения сил запишите уравнение второго закона Ньютона в векторной форме $\vec{a}=\vec{F}/m$, где $\vec{a}$ — ускорение тела, m — масса этого тела, $\vec{F}$ — векторная сумма сил, действующих на это тело. Выберите удобную систему координат и запишите уравнение второго закона Ньютона в проекциях на оси.

Это общие замечания, а теперь приступим к рассмотрению конкретных задач.

1.21 — 1.23. В этих задачах необходимо вспомнить определение понятия давления, его связь с силой $p=F/S$, где p — давление, S — площадь или отверстия или поршня. Гидростатическое давление $p=\rho gH$, где H — высота жидкости, ρ — ее плотность, g — ускорение свободного падения.

1.21. В этой задаче полезно воспользоваться следующей формулировкой второго закона Ньютона: изменение импульса системы тел равно импульсу силы, действующей на эту систему. Определим скорость вытекающей из отверстия струи и затем из кинематических соотношений определим высоту поднятия жидкости (см. задачи 1.5, 1.12).

1.22. Определите силы, действующие на каждый поршень: силу тяжести, силу атмосферного давления, силу гидростатического давления, силу, возникающую вследствие сжатия жидкости поршнями, связанными нитью, и силу реакции нити. Запишите условие равновесия.

1.23. Запишите условие равновесия для жидкости. Необходимо учесть равенство силы реакции стенок и силы давления жидкости на стенки (это вытекает из третьего закона Ньютона). Воспользуйтесь для нахождения массы жидкости формулой для объема конуса: $V_к=\frac{1}{3}SH$.

1.24. Запишите условие равновесия каждого груза с учетом всех сил: силы тяжести mg, силы Архимеда F_A и силы реакции нити. Массу тела выразите через его плотность: $m_{1,2}=\rho_{1,2}V$, а силу Архимеда — через плотность жидкости: $F_A=\rho Vg$.

Решение задач на блоки обычно вызывает трудности. Прежде всего необходимо показать все силы, действующие на каждое тело в отдельности, записать уравнение второго закона Ньютона для каждого тела, выбрав оси координат для каждого тела по направлению ускорения. Записав уравнения, решают систему в общем виде. Законы Ньютона справедливы только для инерциальных систем отсчета!

При решении задач на блоки пренебрегают массой блока, трением в оси блока и трением между нитью и блоком. Поэтому, предполагая, что блок не вращается вокруг своей оси, считаем, что натяжение нитей с обеих сторон блока одинаково. Кроме того, пренебрегаем массой нити и ее растяжением. Это также дает возможность считать натяжение нити одинаковым во всех точках вдоль ее длины.

1.25. Запишите уравнения второго закона Ньютона для каждого тела. Ускорения тел одинаковы, но направлены в разные

стороны. Возьмите проекции векторов на направление ускорений. Решите полученную систему уравнений.

1.26. Покажите силы, действующие на каждое тело. Запишите условие равновесия. Из этого условия определите массу груза Q. Запишите теперь уравнения движения (второй закон Ньютона) для грузов и перегрузка. Учтите, что сила давления перегрузка на груз Q равна силе реакции опоры груза Q на перегрузок. Вы, конечно, заметили, что грузы P и Q проходят различные пути за одно и то же время, значит, и ускорения их различны.

1.27. Вспомните второй закон Ньютона. Запишите уравнение, определите ускорение. Скорость получите из кинематических соотношений.

1.28. Определите и изобразите силы, действующие на тело: силу тяжести, силу реакции опоры, силу трения покоя. Максимальная сила трения покоя $F_{тр}=\mu N$, где N — сила нормального давления, равная по модулю силе реакции опоры (третий закон Ньютона), μ — коэффициент трения. Рассмотрите условие покоя тела: сумма проекций сил на вертикальное и горизонтальное направления равна нулю.

1.29. Изобразите все силы. Запишите уравнение второго закона Ньютона в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления. Работа постоянной силы определяется соотношением: $A=Fs\cos\alpha$, где s — путь, пройденный телом при действии этой силы. Определите этот путь из соотношений кинематики. Надеемся, вы еще помните формулу пути при равноускоренном движении.

1.30. Определите и изобразите силы, действующие на каждый из грузов и на стержень в отдельности. Запишите уравнения второго закона Ньютона для этих тел. Учтите, что по третьему закону Ньютона сила давления со стороны стержня на груз и сила реакции груза на стержень равны по модулю и противоположны по направлению.

1.31. Запишите уравнения второго закона Ньютона для обеих частей шнура, расположенных слева и справа от сечения. Замените эти части материальными точками, учитывая равенство значений сил натяжения в сечении с обеих сторон. Вспомните, что масса частей пропорциональна их длинам.

1.32. Задачу можно решить двумя способами. Первый: запишите второй закон Ньютона, учитывая, что ускорение, направленное против движения, создается двумя силами — силой трения и тормозящей силой; запишите также уравнение для пройденного пути при замедленном движении с начальной скоростью. Второй: уменьшение кинетической энергии $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ равно работе силы трения и тормозящей силы.

1.33. Начертите силы, действующие на тело и на клин. Запишите уравнение второго закона Ньютона, учитывая, что ускорение клина равно нулю. Не забывайте о третьем законе Ньютона:

сила действия вызывает равное по численному значению и противоположное по направлению противодействие.

1.34. Определите взаимодействия, начертите силы, действующие на тело и на клин. Запишите условия равновесия. Силы проектируйте на направление возможного движения и в перпендикулярном направлении. Основная трудность в этой задаче — это выбор направления силы трения. Задумайтесь над этим. Направление силы трения покоя может быть различным. Вы уже поняли, что равновесие возможно в двух случаях: *1* — груз массой M не поднимается по наклонной плоскости, а груз массой m не опускается; *2* — груз массой M не движется вниз по наклонной плоскости, а груз массой m не поднимается. В случаях *1* и *2* силы трения, действующие на груз массой M, направлены в разные стороны.

1.35. Отсутствие сил трения облегчает решение задачи. Начинайте опять с чертежа и составления уравнений второго закона Ньютона. Надеемся, вы еще не забыли, что ускорение надо рассматривать относительно Земли — инерциальной системы отсчета!

1.36—1.50. В этих задачах тело участвует в движении по окружности. Даже при равномерном движении $v=\text{const}$ изменяется направление скорости, а следовательно, появляется центростремительное ускорение. Это ускорение направлено по радиусу к центру окружности и равно $a_ц=\frac{v^2}{R}=\omega^2R=\frac{4\pi^2}{T^2}R=4\pi^2n^2R$. Запишите уравнение второго закона Ньютона. Спроецируйте все силы, действующие на тело, на направление этого ускорения.

1.36. Запишите уравнение второго закона Ньютона для момента, когда танк находится в верхней точке моста. Не забудьте показать силы, действующие на танк,— их всего две: сила тяжести и сила реакции моста.

1.37. Для решения задачи необходимо знать, что условие отсутствия давления означает отсутствие силы давления на сиденье и соответственно по третьему закону Ньютона отсутствие силы реакции опоры в этой точке. Вспомните: нет взаимодействия — нет и сил! Центростремительное ускорение запишите через линейную скорость $a_ц=\frac{v^2}{R}$. Определите скорость из уравнения второго закона Ньютона. В этой задаче необходимо рассмотреть два случая: 1 — самолет движется по окружности с постоянной скоростью, его мотор работает; 2 — самолет совершает «мертвую петлю» с выключенным мотором, его скорость изменяется; искомую скорость определите из закона сохранения энергии: кинетическая энергия в нижней точке траектории равна сумме кинетической энергии в верхней точке и потенциальной в той же точке в поле тяжести Земли относительно нижней точки. Можно, конечно, рассматривать и теорему о кинетической энергии, считая силу тяжести внешней силой: изменение кинетической энергии самолета равно работе силы тяжести.

1.38. Покажите силы, действующие на шарик, в положении, где нить может оборваться. Учтите, что в направлении вдоль нити существует центростремительное ускорение. Запишите уравнение второго закона Ньютона. Скорость определите из закона сохранения энергии.

1.39—1.41. Сделайте чертеж сил, действующих на тело в исследуемых точках. Запишите уравнения движения — уравнения второго закона Ньютона для этих точек. Рассмотрите равномерное и неравномерное движение по окружности. В последнем случае учтите изменение кинетической энергии за счет работы силы тяжести.

1.42. При неравномерном движении по окружности полное ускорение равно векторной сумме центростремительного и тангенциального ускорений. Тангенциальное ускорение является причиной изменения значения скорости. Найдите из рисунка соотношение между этими ускорениями. Запишите закон сохранения энергии для двух положений шарика: в положении наибольшего отклонения от равновесия шарик обладает потенциальной энергией, а в момент, когда нить составляет угол α с вертикалью,— кинетической и потенциальной. Определите скорость через центростремительное ускорение. Для определения тангенциального ускорения используйте второй закон Ньютона.

1.43. Для груза массой m запишите уравнение второго закона Ньютона. Учтите, что этот груз движется по окружности вокруг вертикальной оси в горизонтальной плоскости, следовательно, центростремительное ускорение направлено горизонтально. Условие равновесия для груза массой M определяется из равенства нулю всех сил, действующих на этот груз. Рассмотрите случаи движения груза массой M как вверх, так и вниз.

1.44. В этой задаче вы встретились с новым понятием: предел прочности. Вспомните закон Гука. Предел прочности на разрыв равен отношению наибольшей силы, растягивающей стержень, к площади поперечного сечения стержня. Рассмотрите силы, действующие на стержень в некотором сечении. Силы, направленные вдоль радиуса вращения (вдоль стержня), и создают центростремительное ускорение. Теперь остается только записать второй закон Ньютона и вспомнить связь между линейной скоростью и угловой.

1.45. Вы уже в предыдущей задаче научились выделять некоторый элемент из всего тела. Здесь также необходимо рассмотреть силы, действующие на малый элемент кольца. Учтите, что силы, стремящиеся разорвать кольцо, направлены по касательной к этому элементу и создают центростремительное ускорение, направленное по радиусу к центру окружности (кольца).

1.46. Представьте себе, что происходит с грузами после зацепления нити о гвоздь. Силы упругости, возникающие в нити, с момента зацепления изменяют направление скорости, и грузы будут двигаться по окружности в вертикальной плоскости. Теперь остается записать уравнения второго закона Ньютона и закона сохранения энергии.

1.47. В этой задаче уже нельзя пользоваться приближением материальной точки, т. е. нельзя силы, действующие на тело, прикладывать в одной точке — в центре масс, как мы это делали до сих пор. Силы приложены в тех точках, в которых проявляются взаимодействия. Отсутствие вращения определяется равенством нулю моментов сил относительно предполагаемых осей вращения. Запишите для поступательного движения вдоль горизонтальной поверхности уравнение второго закона Ньютона.

1.48. Рассмотрите силы, действующие на автомобиль, считая его материальной точкой. Запишите уравнение второго закона Ньютона. Центростремительное ускорение направлено горизонтально.

1.49. Мотоциклист по поверхности первого цилиндра движется по окружности. В момент отрыва сила реакции опоры равна нулю. Опишите движение в этот момент, используя второй закон Ньютона. Определите скорость при отрыве от поверхности. До поверхности второго цилиндра мотоциклист движется по параболе. Расстояние между точкой отрыва и точкой приземления определите, вспомнив решения задач 1.5 и 1.10. Расстояние между осями цилиндров определите из геометрических соображений. Помните: прежде всего правильный чертеж и логические рассуждения!

Следующие задачи связаны с применением как закона сохранения энергии, так и закона сохранения импульса. Мы уже неоднократно использовали закон сохранения энергии для замкнутых систем, для которых полная энергия сохранялась. Теперь в некоторых задачах силы трения, силы сопротивления «уносят» энергию из системы, поэтому мы будем считать, что изменение полной энергии системы равно работе этих сил.

1.50. Рассмотрите закон сохранения механической энергии для замкнутой системы, так как здесь пренебрегаем сопротивлением воздуха.

1.51. Удар шайбы о бортик абсолютно упругий, значение скорости не изменяется, и поэтому движение можно рассматривать как непрерывное до удара о бортик и после. Остановка произошла из-за действия сил трения. Кинетическая энергия расходуется на работу против этих сил на всем пути.

1.52. Брусок начинает двигаться, так как пуля передает ему часть своего импульса. Запишите закон сохранения импульса для системы пуля — брусок. Скорость пули после взаимодействия определите из условия изменения кинетической энергии.

1.53. Рассматривайте последовательно то, что происходит с шариком в этой задаче. Сначала он неупруго сталкивается с бруском. Запишите закон сохранения импульса для этого столкновения: после неупругого удара тела движутся вместе. Скорость шарика до удара легко определить, если вы вспомните формулу для кинетической энергии $\frac{mv^2}{2}$. Затем уже известное вам движение по окружности. Запишите уравнение второго закона Ньютона в положении равновесия. Наибольший угол отклонения определяется из закона сохранения энергии для замкнутой системы и из тригонометрических соотношений.

1.54. Рассмотрите закон сохранения импульса в векторной форме, покажите на рисунке направления векторов импульсов взаимодействующих тел до и после удара. Вспомните правило сложения векторов. Из тригонометрических соотношений определите угол.

1.55. При абсолютно упругом ударе энергия тела не изменяется. Проследите за движением тела на всем пути. Подумайте, из-за чего происходят потери энергии. При движении по наклонной плоскости вниз и вверх и по горизонтальной поверхности потери происходят только за счет работы сил трения. Вспомните определение работы и формулы для сил трения на наклонной и горизонтальной поверхностях.

1.56. В этой задаче опять несколько маленьких задач. Рассмотрите их последовательно. Считаем, что взрыв произошел мгновенно. Запишем закон сохранения импульса в векторной форме: импульс снаряда до взрыва равен сумме импульсов осколков после взрыва. У большего осколка нет горизонтальной составляющей скорости, а значение начальной скорости и ее направление вы сможете узнать, записав уравнение движения этого осколка по вертикали. Начертите треугольник векторов — импульсов. Получите значения скоростей меньшего осколка по вертикали и горизонтали. Теперь осталось только рассмотреть движение меньшего осколка как движение тела, брошенного под углом к горизонту (см. задачи 1.5, 1.12).

1.57—1.58. При абсолютно упругом ударе выполняются как закон сохранения импульса, так и закон сохранения механической энергии. Изменения потенциальной энергии не происходит. Помните о векторном характере импульсов. Сделайте чертеж векторов — импульсов и рассмотрите проекции векторов на выбранные вами оси. Подумайте, как проще выбрать эти оси.

1.59. Для определения расстояния вспомните уравнения кинематики, описывающие движение тела в поле тяжести Земли с начальной скоростью, направленной под углом к горизонту (см. задачи 1.5, 1.12, 1.56). Учтите потери энергии при ударе. Для нахождения угла направления скорости после удара учтите, что не изменяется только горизонтальная составляющая скорости, так как при ударе о плиту на тело действует вертикально направленная сила, приводящая к изменению импульса и соответственно скорости в этом направлении.

1.60. В этой задаче изменение импульса системы тел происходит из-за сил трения, что затрудняет ее решение через законы сохранения. Укажите силы, действующие на доску и брусок в отдельности. Не забывайте о третьем законе Ньютона. Запишите уравнение второго закона Ньютона для доски и бруска относительно стола (инерциальной системы отсчета, связанной с Землей). Условие остановки бруска относительно доски означает равенство скоростей доски и бруска относительно стола.

1.61. Примените закон сохранения кинетической энергии и закон сохранения импульса при ударе для системы шарик — клин. Помните о векторном характере импульса системы. Предположите, что за время удара сила тяжести практически не изменяет импульс шарика, а изменение импульса происходит только под действием силы реакции опоры. Именно поэтому составляющая импульса шарика, направленная вдоль наклонной плоскости, при ударе не изменяется.

1.62. Так же как и в предыдущей задаче, пренебрегаем изменением импульса шарика под действием силы тяжести. Считаем, что в вертикальном направлении импульс не изменяется. Запишите закон сохранения кинетической энергии системы шарик — куб. Для нахождения времени и расстояния воспользуйтесь уравнениями кинематики (см. задачи 1.5, 1.12).

1.63. В этой задаче необходимо учесть, что сначала происходит перераспределение импульса между телами *2* и *3*. Впоследствии сила трения ускоряет тело *1* и замедляет тела *2* и *3*. Скорость движения тел как единого целого определится из закона сохранения импульса всей системы $Mv_0=(2M+m)\,v$. Работа силы трения изменяет кинетическую энергию тел.

В задачах на статику необходимо рассматривать два условия равновесия: 1) равенство всех сил нулю или проекций всех сил на взаимно перпендикулярные оси, выбираемые вами; 2) равенство нулю моментов всех сил относительно одной и той же оси; выбор оси, вернее, точки, через которую проходит эта ось, предоставляется также вам.

1.64. Рассмотрите равновесие каждого груза в отдельности. Обязательно сделайте рисунок. Силу трения покоя считайте максимальной.

1.65. Рассмотрите все силы, действующие на доску. Силу трения покоя считайте максимальной. Рассмотрите равенство нулю моментов сил относительно оси, проходящей через одну из точек закрепления доски. Пренебрегите шириной доски. Силы реакции опоры перпендикулярны стенкам.

1.66. Покажите силы, действующие на куб и на тело. Не забывайте о третьем законе Ньютона. Рассмотрите равенство сил нулю, а также равенство моментов сил относительно выбранной вами точки. В этой задаче решение уравнения приводится к решению тригонометрического однородного уравнения.

1.67. Покажите силы, действующие на клин, и запишите условие равенства нулю моментов сил относительно оси, проходящей через ребро клина (точку O), для начального момента времени и для произвольного. Выведите связь между массами тел и расстояниями, пройденными ими. Расстояния, пройденные телами, определяются также соотношениями из кинематики для равнозамедленного движения. Проанализируйте полученные соотношения. Помните, что сила трения при скольжении равна μN. Найдите дополнительную силу, не нарушающую равновесие.

Рассмотрим несколько задач на механические гармонические колебания. Вам необходимо помнить, что гармонические колебания (мы рассматриваем только свободные) происходят под действием упругих сил $F=kx$. Зависимость смещения от времени для гармонических колебаний описывается законом $x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$, где A — амплитуда, т. е. максимальное смещение от положения равновесия, ω — круговая частота, φ_0 — начальная фаза. Амплитуда и начальная фаза зависят только от начальных условий, от той энергии, которую мы сообщили колеблющейся системе в начальный момент времени, и от состояния этой системы в этот момент. Круговая частота $\omega=2\pi/T$ зависит от характеристик системы. Для пружинного маятника $\omega^2=\frac{k}{m}$, где m — масса колеблющегося груза, k — жесткость пружины. Для математического маятника $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l — длина маятника, g — ускорение свободного падения.

1.68. Рассмотрите силы, действующие на груз в положении равновесия. Закон сохранения механической энергии поможет вам решить эту задачу. Вспомните формулу для потенциальной энергии сжатой пружины $E_п=\frac{kx^2}{2}$.

1.69. Рассмотрите колебания груза на пружине. Полная энергия в любой момент времени равна максимальной энергии растянутой пружины или максимальной кинетической энергии груза при прохождении им положения равновесия. Колебания происходят только под действием силы тяжести.

1.70. Запишите уравнение гармонических колебаний. Вспомните, что круговая частота $\omega=2\pi\nu$. Запишите полную энергию через амплитуду, а возвращающую силу через второй закон Ньютона $F=ma$.

1.71. Воспользуйтесь законом сохранения энергии и вторым законом Ньютона для сил, действующих на груз в момент прохождения положения равновесия.

1.72. Запишите закон сохранения импульса и энергии для системы тел. Учтите, что сжатие пружинки будет максимальным, когда тела будут двигаться с одинаковой скоростью относительно Земли.

II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

При решении задач на газовые законы необходимо прежде всего помнить, что обычно рассматриваются законы идеального газа. Это прежде всего уравнение Менделеева-Клапейрона $pV=\nu RT$, описывающее связь между параметрами одного и того же состояния: p — давление, V — объем сосуда, в котором находится газ, T — температура по шкале Кельвина (абсолютной шкале), $T=t\,°\text{C}+273$, R — универсальная постоянная, $R=8{,}31$ Дж/(моль·К), ν — количество вещества (число молей), $\nu=\frac{m}{M}$, где m — масса газа, M — молярная масса.

При рассмотрении изопроцессов можно пользоваться как уравнением Менделеева-Клапейрона, записав его для каждого состояния, так и уравнениями изопроцессов. В последнем случае помните, что число молей должно быть постоянно!

В некоторых задачах рассматривается связь давления газа с его концентрацией и абсолютной температурой: $p=nkT$.

Многие задачи в этом разделе графические. Для их решения надо вспомнить графики линейной и обратно пропорциональной зависимостей.

При решении ряда задач будем обращаться к механике (закону сохранения импульса), так как молекулы идеального газа при столкновениях можно рассматривать как упругие тела.

2.1. Число ударов ν молекул, движущихся в заданном направлении, о единицу площади поверхности сосуда в единицу времени можно записать: $\nu=\frac{1}{6}nv$, где n — концентрация молекул газа, v — средняя квадратичная скорость молекул; коэффициент $\frac{1}{6}$ появляется из статистического (вероятностного) рассмотрения газовых законов движения молекул. Скорость v можно получить, приравняв механическую кинетическую энергию одной молекулы $\frac{mv^2}{2}$ к статистической $\frac{3}{2}kT$, где k — постоянная Больцмана. Напомним, что $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К. Выразите концентрацию n через плотность газа и его молярную массу.

2.2. Воспользуйтесь указанием к задаче 2.1. Концентрацию n в этой задаче выразите через давление и температуру.

2.3. Вспомните закон Дальтона: давление смеси газов равно сумме их парциальных давлений — или соотношение $p=nkT$, где n — концентрация молекул газа, равная сумме концентраций каждого газа. Надеемся, вы понимаете, что все молекулы каждого газа занимают весь объем сосуда! Воспользуйтесь уравнением Менделеева-Клапейрона для каждого газа и найдите связь давлений с молярными массами.

2.4. Вспомните связь давления с силой давления (задачи 1.21—1.23). Силу определите через изменение импульса. Учтите неупругий удар атомов серебра. Масса напыленного серебра равна сумме масс всех атомов, попавших на поверхность.

2.5. Определите молярную массу соединения из уравнения Менделеева-Клапейрона. Запишите связь между массой и плотностью. Получите одно уравнение с двумя неизвестными. Но эти неизвестные — целые числа! Молярные массы веществ — табличные данные.

2.6. Запишите уравнение Менделеева-Клапейрона для двух состояний газа. Помните, что температура должна быть выражена в градусах Кельвина. Объем, давление и молярная масса не изменяются.

2.7. В этой задаче можно, как и в предыдущей, записать уравнения Менделеева-Клапейрона для двух состояний, а можно воспользоваться объединенным газовым законом. Нормальные условия: давление $p_0=10^5$ Па, температура $T_0=273$ К. Можно решать эту задачу, зная, что при нормальных условиях один моль любого газа занимает объем $V_0=22{,}4$ л. Как видите, выбор большой!

2.8. Запишите уравнение изотермического процесса (закон Бойля-Мариотта).

2.9. Запишите отношение объемов и давлений из уравнения изотермического процесса. Из полученной пропорции математическими методами найдите связь первоначального давления с разностью давлений и объемами.

2.10. Запишите уравнения изотермического процесса для каждого газа. Запишите закон Дальтона (см. указания к задаче 2.3).

2.11. При изменении массы газа в одной из частей цилиндра изменяются объем и давление. После наступления равновесия давление в обеих частях цилиндра становится одинаковым, так как на поршень с обеих сторон действуют одинаковые по величине, но направленные в разные стороны силы. Состояния газа в обеих цилиндрах опишите уравнением Менделеева-Клапейрона.

2.12. При нагревании газа изменяются объем и давление. При равновесии давление в обеих частях цилиндра одинаково. Состояние газа в одной части цилиндра опишите уравнением объединенного газового закона, а в другой — законом Бойля-Мариотта.

2.13. Для решения этой задачи необходимо сделать рисунок. Тогда ясно будет видно, что при изменении положений поршня B и поршня A объем одной части увеличивается на Sa, а другой увеличивается на $S(b-a)$. Для определения изменения объемов воспользуйтесь уравнением изотермического процесса, а для нахождения соотношения между объемами — уравнением Менделеева-Клапейрона. Можно решать задачу, используя для обоих газов и для двух состояний уравнение Менделеева-Клапейрона, помня, что количество вещества в сосудах не изменяется.

2.14. В этой задаче используется уравнение изотермического процесса. Необходимо также вспомнить определение относительной влажности.

2.15. Запишите уравнение изохорного процесса $\frac{p_1}{T_1}=\frac{p_2}{T_2}$. Первоначальное давление и конечную относительную влажность получите из определения относительной влажности $\left(f=\frac{p}{p_н}\right)$.

2.16—2.17. Насыщенные водяные пары можно описывать с хорошей точностью уравнением Менделеева-Клапейрона для идеальных газов.

2.18. Вспомните определение точки росы. Начертите график зависимости плотности насыщенного пара в области приведенных в задаче температур. По графику составьте пропорции для плотностей и температур. Воспользуйтесь понятием относительной влажности.

Следующие задачи требуют знания термодинамического определения работы газа $A=p\Delta V$, где p — давление, ΔV — изменение объема. Помните, что это определение только для изобарного процесса. Работу при переменном давлении можно определить по графику зависимости давления от объема (работа численно равна площади под этим графиком).

Необходимо также помнить первый закон термодинамики (закон сохранения энергии для газов). Вспомните также определение внутренней энергии газа $U=C_v\nu T$, где C_v — молярная теплоемкость, которая для одноатомного газа равна $C_v=\frac{3}{2}R$.

2.19. Получите соотношение для работы при изобарном нагревании через изменение температуры. Используйте для этого уравнение Менделеева-Клапейрона.

2.20. Для определения работы вам необходимо знать изменение объема и давление, которое постоянно при изобарном процессе. Определите это давление из уравнения Менделеева-Клапейрона.

2.21. Постройте график зависимости изменения давления от объема. Легко видеть, что работа совершается только при втором (изобарном) процессе: $A=p_2(V_2-V_1)$. Произведение давления на объем замените соотношениями через начальную температуру, используя уравнение Менделеева-Клапейрона для начального и промежуточного состояний.

2.22—2.23. Для решения этих задач необходимо начертить график кругового процесса в координатах (p, V). Это делается для того, чтобы работу, совершенную за цикл, определить как площадь под этим графиком. Для определения давлений воспользуйтесь уравнением объединенного газового закона (см. решение задачи 2.7).

2.24. Запишите первый закон термодинамики для процессов ABC и ADC. Сравните изменение внутренней энергии газа и работу, совершаемую газом, в этих процессах.

2.25. Примените первый закон термодинамики для изохорного и изобарного процессов. Выразите изменение внутренней энергии через удельную теплоемкость газа при постоянном объеме. При вычислении работы используйте уравнение Менделеева-Клапейрона.

2.26. В этой задаче изменение температур найдите из соотношения для работы при изобарном сжатии, выраженной через разность температур (см. решение задачи 2.19). А теперь вспомните, что количество теплоты, отведенной от газа, определяется через удельную теплоемкость c_p, измеренную при постоянном давлении, через массу и разность температур.

2.27. Давление смеси газов определите из закона Дальтона. Давления каждого газа (парциальные давления) получите из уравнения Менделеева-Клапейрона. Вам не ясно, зачем в задаче дана удельная теплоемкость и какую температуру выбирать при определении давлений каждого газа — начальную или какую-то другую? Разумеется, надо определить новую температуру смеси. Молекулы газов, перемешиваясь, сталкиваются между собой и передают друг другу энергию. При этом один газ нагревается, другой охлаждается, но полная внутренняя энергия не изменяется. Приравняйте изменения энергии этих газов, считая, что их конечная температура одинакова. Таким образом, записав уравнение теплового баланса, вы определите конечную температуру.

2.28. Вы уже из предыдущей задачи знаете, что температура конечного равновесного состояния определяется из уравнения теплового баланса. Давление смеси найдите из закона Дальтона. Массу воздуха в каждом сосуде определите из уравнения Менделеева-Клапейрона. Для определения парциальных давлений воспользуйтесь объединенным газовым законом для каждой массы газов. Попробуйте найти парциальные давления газов из уравнения Бойля-Мариотта. Для окончательного давления должен получиться один и тот же результат!

2.29. Сила, необходимая для удержания поршня, определяется разностью сил, действующих на поршень с обеих сторон. Силы определяются через давления, установившиеся в каждой части цилиндра. Эти давления определите из объединенного газового закона. Запишите этот закон для каждой части цилиндра. В этой задаче пренебрегают теплообменом с внешней средой. Вспомните, что процесс, протекающий без теплообмена с внешней средой, является адиабатным. При этом при расширении газ охлаждается, а при сжатии нагревается. В условии сказано, что над газом была совершена работа, следовательно, в целом весь газ нагрелся. Вся работа пошла на увеличение внутренней энергии газа. Массу определите из уравнения Менделеева-Клапейрона.

2.30. Запишите первый закон термодинамики. Работу газа определите через изменение потенциальной энергии пружины (см. задачу 1.68). Вспомните значение внутренней энергии одноатомного газа. Изменение температуры найдите, записав уравнение Менделеева-Клапейрона для двух состояний газа.

2.31. Вспомните определение КПД теплового двигателя. В случае теплового двигателя полезной работой является разность количества теплоты, полученной от нагревателя и отданной холодильнику. Затраченная работа — это количество теплоты, полученной от нагревателя.

2.32. Составьте уравнение теплового баланса. Вспомните, что конденсация пара происходит без изменения температуры и при этом выделяется тепло. Количество теплоты $Q=rm$, где r — удельная теплота парообразования, m — масса сконденсировавшегося пара. Массу пара можно получить, записав уравнение Менделеева-Клапейрона. Пренебрегите в задаче объемом сконденсировавшейся воды.

2.33. По закону сохранения энергии отведенное от цилиндра количество теплоты равно сумме совершенной работы и количества теплоты, выделившейся при конденсации насыщенного пара. Работу при изобарном процессе выразите через изменение объема и давление. Массу пара определите из уравнения Менделеева-Клапейрона.

2.34. Запишите уравнение теплового баланса. Помните, что сначала надо выяснить, при каком процессе тепло выделяется, а при каком — поглощается. В этой задаче калориметр и масло нагреваются, т. е. получают некоторое количество теплоты, а медное тело охлаждается, следовательно, оно отдает тепло. В этой и следующих задачах помните, что разность температур одинакова и по шкале Кельвина, и по шкале Цельсия: $\Delta t=\Delta T$.

2.35. В уравнении теплового баланса медное тело отдает тепло, а жидкий азот такое же количество получает при превращении в пар (газообразное состояние).

2.36. Вся вода в сосуде нагревается до 0 °С, поглощая тепло, часть воды превращается в лед, выделяя такое же количество теплоты. Вспомните, чему равно количество теплоты, выделяющееся при кристаллизации (отвердевании): λm, где λ — удельная теплота плавления.

2.37. При составлении уравнения теплового баланса учтите, что лед сначала нагревается до температуры плавления, затем плавится, после этого он, превратившись в воду, нагревается. Все может произойти и наоборот. Вода остывает до 0 °С и начинает замерзать. Поэтому такие задачи делают поэтапно, вычисляя, например, хватит ли выделившегося при остывании воды тепла на нагревание льда. Предположим, хватило и еще осталось! Тогда лед начинает таять, но весь не растаял — больше нет тепла. Общая температура равна нулю. А если тепла мало, не хватает на нагревание льда, вода начинает замерзать, если она не вся замерзнет, то опять температура будет равна 0 °С, если вся замерзнет, то может и охладиться. Отнеситесь к этим задачам и вычислениям в них более внимательно!

2.38. Составьте уравнение теплового баланса. Определите массу образовавшегося пара, предположив, что он является насыщенным, т. е. при температуре 100 °С давление его в сосуде равно 10^5 Па. Определите массу пара из уравнения Менделеева-Клапейрона. Если эта масса меньше или равна массе льда, то ваши рассуждения правильные! Учтите также, что пар займет объем сосуда минус объем меди и оставшейся воды.

2.39. Составьте уравнение теплового баланса. Разумеется, пар отдает тепло, лед и вода поглощают. Вы, конечно, вспомнили, что при тепловом равновесии льда и воды их температура равна 0 °С.

2.40. Запишите закон сохранения энергии: количество теплоты, выделяющейся в комнате, складывается из количества теплоты, выделяющейся при охлаждении воды, замерзании льда, остывании льда и энергии, потребляемой из сети. Вспомните связь работы и мощности.

2.41. В стационарном состоянии через носик чайника за время t вытекает пар объемом $V=Svt$. Выразите этот объем из уравнения Менделеева-Клапейрона, а массу из закона сохранения энергии.

2.42. Количество теплоты, полученное от электроплитки (с учетом КПД), идет на плавление льда, нагревание воды до температуры кипения и частичное превращение ее в пар. Массу пара определите из уравнения Менделеева-Клапейрона.

2.43. Высота, на которую поднимется поршень, равна $h=\frac{V}{S}$, где V — объем насыщенного пара, который определите из уравнения Менделеева-Клапейрона. Массу пара определите из закона сохранения энергии.

2.44. В этой задаче, как и в предыдущей, поршень поднимается из-за силы, действующей на поршень вследствие расширения пара. Работа по поднятию поршня равна работе, совершенной паром. Составьте уравнение теплового баланса: железо, остывая, отдает тепло, которое расходуется на нагревание воды и ее превращение в пар. Из этого уравнения определите массу пара. Объем пара получите из уравнения Менделеева-Клапейрона.

2.45. В этой задаче надо воспользоваться законом сохранения энергии: энергия ниоткуда не появляется, никуда не исчезает, она только переходит из одного вида в другой! Кинетическая энергия, вернее, изменение кинетической энергии, равна количеству теплоты, выделившейся в трущихся поверхностях.

2.46. При равномерном движении капли сумма сил, действующих на нее, равна нулю. Из этого уравнения определите скорость капли. Запишите уравнение закона сохранения энергии. Работа силы сопротивления расходуется на нагревание капли. Массу определите через плотность и объем, считая каплю сферической $\left(V=\frac{4}{3}\pi R^3\right)$.

2.47. Изменение кинетической энергии пули равно количеству теплоты, идущей на ее нагревание. Определите из этого соотношения скорость пули после вылета ее из доски. А теперь вспомните кинематику: движение тела, брошенного горизонтально (см. задачу 1.5).

2.48. Опять надо вспомнить механику: законы сохранения импульса и энергии для неупругого соударения. Вся энергия деформации расходуется на нагревание (см. задачу 1.53).

2.49. В этой задаче запишите два уравнения из законов сохранения импульса и энергии. Не забывайте, что закон сохранения импульса необходимо записывать в векторной форме, так как в этой задаче скорости перпендикулярны друг другу!

2.50. Вы не один раз ударяли молотком по гвоздю и, конечно, никогда не задумывались о нагревании гвоздя! Давайте вместе подумаем. Некоторое время молоток и гвоздь после удара движутся вместе — это неупругий удар. Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения энергии для неупругого удара (см. задачу 2.48). Не забудьте, что удар совершаем n раз! Остается только записать количество теплоты, идущей на нагревание, через удельную теплоемкость, массу и изменение температуры.

2.51. Трудность в решении этой задачи заключается в том, что надо четко представить себе, как направлены сила и перемещение при совершении работы за один оборот. В каждый момент времени сила и перемещение направлены по касательной! Следовательно, за один оборот совершается работа $A=2F\pi d$. Коэффициент 2 появляется из-за того, что рабочий прикладывает пару сил. Вспомните определение момента. Число оборотов определите, разделив длину всей шпильки на шаг резьбы. Вам пришлось ввести неизвестную длину шпильки. Не волнуйтесь, ведь вы будете записывать массу шпильки через плотность и объем. Объем же запишите через длину и площадь сечения. Не забудьте, что только 50% выделившегося тепла идет на нагревание шпильки.

2.52. Нагревание происходит в результате работы сил трения. Силы трения определите из закона динамики — второго закона Ньютона для движения штанги по окружности в горизонтальной плоскости. Вспомните формулу для центростремительного ускорения через угловую скорость. Не забудьте сделать

чертеж сил! Оси координат удобнее выбрать в вертикальном и горизонтальном направлениях (см. задачи 1.36—1.50).

2.53. Составьте уравнения, определяющие равновесие стакана: сумма сил, действующих на стакан, равна нулю. Учтите, что в тот момент, когда стакан начинает всплывать, сила реакции дна обращается в нуль! Силу давления воды на дно стакана запишите через давление и площадь дна. Не забудьте об атмосферном давлении. При нагревании воды в сосуде нагревается и воздух в стакане, при этом изменяется давление воздуха в стакане. Для определения этого давления воспользуйтесь уравнением изохорного процесса (см. задачу 2.15). Решите систему полученных уравнений.

III. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Для решения задач на электростатику необходимо вспомнить о силе взаимодействия между точечными зарядами. Эта сила определяется законом Кулона $F=\frac{kq_1q_2}{r^2}$, где q_1 и q_2 — заряды, r — расстояние между ними. В задачах 3.1—3.8 необходимо учитывать действие этой силы, помня также, что одноименно заряженные тела отталкиваются, а разноименно — притягиваются. Сила Кулона, действующая на заряженные тела, помещенные в диэлектрик, уменьшается в ε раз, где ε — диэлектрическая проницаемость вещества (диэлектрика). В воздухе $\varepsilon=1$. Коэффициент в законе Кулона $k=9\cdot10^9$ Н$\cdot$м^2/Кл^2, $k=1/4\pi\varepsilon_0$, где ε_0 — электрическая постоянная, $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

3.1. Запишите закон Кулона для двух состояний системы.

3.2. В таких задачах необходимо сделать чертеж сил, действующих на тела, рассматриваемые в задаче. Рассмотрите силы, действующие на шарики до и после погружения в жидкость. Помните, что в диэлектрике сила Кулона уменьшается в ε раз, где ε — диэлектрическая проницаемость жидкости. Надеемся, вы еще не забыли о силе Архимеда, действующей на тела, погруженные в жидкость! Запишите условия равновесия: равенство нулю векторной суммы сил. Выберите вертикальную и горизонтальную оси координат. Спроектируйте все силы. Воспользуйтесь равенством углов отклонения нитей. Вы, конечно, догадались, что из симметрии расположения шариков можно рассматривать силы, действующие только на один из них.

3.3. Рассмотрите силы, действующие на один из зарядов Q. Из условий симметрии заряд q надо расположить в центре симметрии треугольника. Рассмотрите условие равновесия: сумма сил равна нулю и сумма проекций сил на любое направление равна нулю. Вспомните условия устойчивости и неустойчивости равновесия.

3.4. На электрон в атоме гелия действует сила притяжения к ядру атома и сила отталкивания от другого электрона. Найдите равнодействующую этих сил и вспомните второй закон Ньютона для движения по окружности.

3.5—3.6. Сумма сил, действующих на каждый из зарядов, создает центростремительное ускорение $a_ц = \omega^2 r$.

3.7. Рассмотрите суммы сил, действующих на заряды $+Q$ и $-Q$. Решение задачи упростится, если вы найдете суммы проекций сил на прямые, соединяющие одноименные заряды.

3.8. В этой задаче необходимо рассмотреть силы, действующие на малый элемент кольца (см. задачу 1.45). Длина этого элемента $l = R \sin\alpha \approx R\alpha$, где α — угол, под которым этот элемент виден из центра. Ввиду малости выбранного элемента, а следовательно, и угла α $\sin\alpha \approx \alpha$. Определите заряд этого элемента. Рассмотрите условие равновесия при действии сил, растягивающих кольцо, и кулоновской силы.

Следующие задачи можно решить, рассматривая работу по перемещению зарядов (вернее, заряженных тел) в электростатическом поле. Вспомните понятия потенциала и разности потенциалов, введенные для описания электростатического поля. Так как эти понятия связаны с энергией, то смело пишите закон сохранения энергии. Напомним: потенциал точки поля φ — физическая величина, численно равная отношению потенциальной энергии заряженного тела, помещенного в эту точку поля, к заряду этого тела. Работа по перемещению заряженного тела равна произведению разности потенциалов начальной и конечной точек перемещения на заряд переносимого тела. Работа в электростатическом поле не зависит от формы пути. Работа по замкнутому контуру в электростатическом поле равна нулю — это основное свойство электростатического поля.

3.9. Запишите формулу связи работы и разности потенциалов.

3.10. Переносите заряды из бесконечности в соответствующие точки поля. Помните, что потенциал поля возрастает после каждого перенесения заряда. Вспомните принцип суперпозиции полей при определении потенциала точек поля, создаваемого двумя и тремя зарядами.

3.11. Запишите закон сохранения импульса, учитывая при этом равенство скоростей протона и альфа-частицы в тот момент, когда расстояние между ними наименьшее. В этот момент их относительная скорость равна нулю; они мгновение покоятся относительно друг друга, а потом начинают друг от друга «удирать», ведь они заряжены одинаковым по знаку зарядом! Остается записать закон сохранения энергии. Не забудьте потенциальную энергию одной частицы в поле другой! Поле, разумеется, электростатическое.

Эта и следующая задачи часто вызывают недоумение: как это в электростатике рассматриваются какие-то ядерные частицы — протон и альфа-частица? Задумайтесь на минутку: это же просто заряженные тела. Рассмотрите их как материальные точки, т. е. пренебрегите их размерами, но массы и заряды учитывайте.

3.12. Запишите законы сохранения импульса (в начальный момент времени суммарный импульс системы равен нулю) и закон сохранения энергии. В начальный момент времени частицы обладают только потенциальной энергией (одна в электростатическом поле другой), в конечный момент времени, кроме этой энергии, у частиц появляется кинетическая энергия.

3.13—3.14. Запишите закон сохранения энергии для покоящихся и для движущихся шариков. Учтите, что потенциальную энергию электростатического взаимодействия можно рассматривать как энергию одного из шариков в электростатическом поле, создаваемом остальными. Рассматривая симметрию в начальном расположении шариков, убедитесь, что после их движения форма фигуры, в вершинах которой они располагаются, не изменится, изменятся только размеры.

3.15. Потенциал металлического шара в вакууме определяется соотношением $\varphi = \frac{kq}{r}$, где r — радиус шара. Заряд на шаре определим из этого соотношения. В начальный момент времени суммарный заряд оболочки равен нулю. После соединения оболочки с Землей на ней остается заряд, противоположный по знаку заряду на шаре. Это происходит из-за того, что заряд шара «удерживает» противоположный заряд металлической оболочки, а заряд такого же знака «уходит» от него как можно дальше. Заряд на оболочке можно определить из равенства нулю потенциала оболочки. Помните, что потенциал Земли принимаем за нуль! Не забудьте принцип суперпозиции: потенциал оболочки равен алгебраической сумме потенциала, создаваемого зарядом на ней, и потенциала от заряда на шаре. При расчете потенциала от заряда шара расстояние берем от центра, т. е. считаем, что весь заряд шара сосредоточен в его центре.

При расчете потенциала шара учтите потенциал, создаваемый зарядом на оболочке. Вы не забыли, что потенциал во всех точках внутри шара (сферы) равен потенциалу на его поверхности?

3.16. Потенциалы шариков, соединенных проводником, одинаковы. Из этого условия определите заряд на каждом шарике. После окружения шарика заземленной сферой его потенциал уменьшится (см. задачу 3.15). На него будут перетекать заряды с другого шарика до тех пор, пока опять не уравняются потенциалы. Учтите также закон сохранения зарядов.

3.17. Потенциал каждого шарика запишите с учетом того, что он находится в поле другого шарика. Вспомните определение емкости уединенной системы зарядов.

В задаче 3.17 и в последующих задачах вы должны вспомнить понятие электроемкости конденсатора и различных соединений конденсаторов. Электроемкость (емкость) — это физическая величина, равная отношению заряда, нанесенного на уединенное проводящее тело, к потенциалу (разности потенциалов), до которого это тело заряжается нанесенным на него зарядом: $C=\frac{q}{U}$.

При параллельном соединении конденсаторов разность потенциалов на каждом из них одинакова; общий заряд равен сумме зарядов на каждом: $q=q_1+q_2+\ldots$. Общая электроемкость системы равна сумме электроемкостей каждого конденсатора: $C=C_1+C_2+\ldots$. Заряды относятся как электроемкости: $q_1:q_2:q_3:\ldots=C_1:C_2:C_3:\ldots$.

При последовательном соединении конденсаторов складываются напряжения (разности потенциалов), а заряд на каждом конденсаторе одинаков и равен общему заряду в системе: $U=U_1+U_2+U_3+\ldots$, $q=q_1=q_2=q_3=\ldots$. Отсюда получим $\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+\ldots$, т. е. складываются обратные значения электроемкостей.

3.18. Упростите предложенную схему. Начертите ее симметрично относительно конденсатора емкостью C_0. Помните, что провода, соединяющие конденсаторы, можно располагать как угодно. Из симметрии рисунка будет видно, что на конденсаторе емкостью C_0 отсутствует заряд, разность потенциалов на нем равна нулю. Этот конденсатор можно не учитывать! Дальнейшая схема представляет собой простейшее последовательное и параллельное соединение.

3.19. Определите заряды на каждом конденсаторе после зарядки. Соединение одноименными обкладками означает параллельное соединение. Учтите соотношения при этом соединении, а также не забывайте о законе сохранения зарядов.

3.20. Так как конденсаторы соединены параллельно и отключены от источника, полный заряд равен сумме зарядов на каждом из конденсаторов и не изменяется при заполнении конденсатора диэлектриком. Используйте правила параллельного соединения конденсаторов (напряжение на конденсаторах одинаково, заряды распределяются пропорционально емкостям). Вспомните также выражение для энергии, запасенной в поле конденсатора.

3.21. Определите начальную энергию системы конденсаторов после отключения от источника и быстрого раздвижения пластин. После установления равновесия на конденсаторах установятся новые заряды, пропорциональные их емкостям. Вспомните, что электроемкость плоского конденсатора обратно пропорциональна расстоянию между обкладками. Определите эти новые заряды и соответственно и новые энергии. В тепло переходит

энергия, равная разности начальной энергии и энергии конденсаторов после установления равновесия в системе.

3.22. Используйте правила последовательного соединения конденсаторов; учтите, что заряд конденсаторов не изменился, так как они отключены от источника.

3.23—3.24. Так как конденсатор подключен к источнику, заряд на нем изменяется при раздвижении пластин или при удалении диэлектрика, т. е. при изменении емкости. Совершаемая работа складывается из изменения энергии поля конденсатора и работы против ЭДС источника, для вычисления которой нужно определить изменение заряда конденсатора при изменении его емкости.

Последующие задачи рассматривают включение конденсаторов в сеть с источниками ЭДС и резисторами. При решении этих задач необходимо помнить, что конденсатор не пропускает постоянный ток! Ток идет только через участки цепи, в которых нет конденсаторов. Вспомните также закон Ома как для полной цепи $I=\frac{\mathscr{E}}{R+r}$, где R — сопротивление резистора, r — внутреннее сопротивление источника, $\mathscr{E}$ — электродвижущая сила источника (ЭДС), так и для участка цепи $I=\frac{U}{R}$, где U — напряжение (разность потенциалов) на концах участка, I — сила тока.

3.25. Заряды на конденсаторах определите через емкости конденсаторов и напряжения. Напряжения определяются из закона Ома для участка цепи, сила тока — из закона Ома для полной цепи. Учтите, что конденсатор в цепи постоянного тока — это разрыв электрической цепи. ЭДС $\mathscr{E}_1$ не создает тока, но способствует созданию разности потенциалов на конденсаторе $C1$.

3.26. Внимательно изучите схему. Вы уже понимаете, что ток через источник с $\mathscr{E}_2$ не течет. Силу тока определяем из закона Ома для замкнутой цепи с $\mathscr{E}_1$ и резисторами $R1$ и $R2$. Определяем общую емкость последовательно соединенных конденсаторов. Заряд конденсаторов пропорционален общей емкости, напряжению на резисторе $R2$ минус $\mathscr{E}_2$. Определите заряд, а затем и напряжения.

Можно найти заряд конденсатора, записав закон сохранения энергии для замкнутого контура, содержащего конденсаторы, резистор $R2$ и источник с $\mathscr{E}_2$.

3.27. Заряд, прошедший при замыкании ключа, $q=q_1+q_2$, так как при замыкании ключа заряд на конденсаторе меняет знак. При разомкнутом ключе ток течет по контуру, состоящему из источника и двух резисторов. Определите напряжение на обкладках конденсатора и его заряд. При замкнутом ключе напряжение на конденсаторе равно напряжению на одном резисторе.

При этом необходимая для вычисления напряжения сила тока определяется из закона Ома для полной цепи.

3.28. Учтите, что ток течет только через резисторы $R1$ и $R2$. Примите за нуль потенциал точки O и определите потенциалы точек A и B. Составьте уравнения, связывающие заряды конденсаторов с разностью потенциалов на них, и используйте закон сохранения заряда.

3.29. Определите разность потенциалов на конденсаторе, приняв за нуль потенциал одной из точек соединения резистора с цепью.

3.30. Используйте правила последовательного соединения конденсаторов.

Задачи 3.31—3.35 на использование закона Ома для полной цепи и для участка цепи, причем в цепях отсутствуют конденсаторы. Вспомните, как включаются приборы для измерения силы тока — амперметры и для измерения напряжения — вольтметры. Амперметр включается последовательно, и его сопротивлением обычно пренебрегают. Вольтметр включают параллельно исследуемому участку; его сопротивление считается очень большим, таким, что пренебрегают током, текущим через него.

Для решения этих задач необходимо также вспомнить правила сложения сопротивлений при различных соединениях резисторов. При последовательном соединении сила тока через все резисторы одинакова, а напряжения складываются, общее сопротивление равно сумме сопротивлений. При параллельном соединении напряжение на всех резисторах одинаково, силы токов относятся обратно пропорционально сопротивлениям, суммарная сила тока равна сумме сил токов через каждый резистор. Складываются проводимости, т. е. величины, обратно пропорциональные сопротивлениям.

3.31. Определите общее сопротивление, учитывая, что три одинаковых резистора соединены последовательно и к ним присоединен параллельно такой же резистор. После этого запишите закон Ома для полной цепи. Напряжение на зажимах батареи равно $\mathscr{E}-Ir$, где r — внутреннее сопротивление.

3.32. Показание вольтметра равно произведению силы тока, текущего через него, на сопротивление этого вольтметра. В данной задаче нельзя считать сопротивление вольтметра бесконечно большим, а также нельзя пренебрегать сопротивлением амперметров. Рассматривайте эти приборы как резисторы. Определите их сопротивление. Помните, что сила тока в параллельных сопротивлениях обратно пропорциональна сопротивлениям. А сила тока, подходящего к параллельному соединению, равна сумме сил токов в этих сопротивлениях!

3.33. Напряжение на источнике равно ЭДС минус падение напряжения на внутреннем сопротивлении. Показание вольтметра равно нулю, следовательно, и напряжение на обоих источниках равно нулю. Составьте два уравнения с двумя неизвестными.

3.34. Сила тока через проводник AB равна алгебраической сумме сил токов, создаваемых источниками *1* и *2*. По закону Ома для замкнутой цепи, учитывая, что сопротивление проводника AB равно нулю, определите силы токов. Внимательно следите за направлением токов. Считайте, что ток направлен во внешней цепи от «+» источника к «—».

3.35. Эту задачу можно решить, используя правила Кирхгофа: 1) алгебраическая сумма сил токов в узле равна нулю; 2) алгебраическая сумма напряжений в контуре равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре. Первое правило вытекает из закона сохранения заряда в точке (заряд в точке не может накапливаться). Второе правило вытекает из закона сохранения энергии.

Предположим, вы не знакомы с этими правилами, тогда задачу можно решить следующим образом. Сила тока на каждом участке цепи равна алгебраической сумме сил токов, созданных каждым из источников. При этом если, например I' — сила тока, созданного источником с ЭДС $\mathscr{E}_1$, то источник с ЭДС $\mathscr{E}_2$ рассматривается просто как сопротивление r. Начертите схемы и запишите закон Ома для полной цепи в каждой схеме.

В следующих задачах рассматривается тепловое действие тока. Количество теплоты, выделяющейся в проводнике, определяется по закону Джоуля-Ленца. Определение мощности тока запишите для трех разных случаев: 1) напряжение и сила тока постоянны ($N=IU$); 2) напряжение постоянно, сила тока изменяется $\left(N=\frac{U^2}{R}\right)$; 3) сила тока постоянна ($N=I^2R$).

Вспомните также определение коэффициента полезного действия как отношение полезной мощности к полной (затраченной).

3.36. В этой задаче рассматривается прохождение тока через жидкость и вызываемое этим током выделение вещества на катоде. Масса выделившегося при электролизе вещества определяется законами Фарадея. В этой задаче сопротивление жидкости между электродами можно рассматривать через удельное сопротивление ϱ, площадь поперечного сечения S (в этом случае — площадь электродов, погруженных в жидкость) и длину проводника l. За длину l будем принимать расстояние между электродами.

3.37. Из общей формулы для КПД получите формулу, связывающую КПД с внешним и внутренним сопротивлениями.

3.38. Рассчитайте сопротивление каждой лампочки, зная мощность и напряжение, на которое они рассчитаны. Определите полное сопротивление: к первой лампочке последовательно подсоединены две соединенные параллельно друг другу лампочки. Теперь из закона Ома найдите полный ток в цепи. Внимательно рассмотрите, какие токи протекают по каждой лампочке. Через лампочку мощностью P_{01} течет весь ток. Токи через другие лампочки можно определить или через токи в параллельных сопротивлениях, или через напряжение на этих лампочках.

3.39. Запишите законы Ома и Джоуля-Ленца для холостого хода и при работе с нагрузкой.

3.40. Мощность, отбираемая от сети, равна сумме мощности, развиваемой на валу электродвигателя, потерь на нагревание обмотки и механических потерь.

3.41. Используйте второй закон Ньютона и определение КПД двигателя. Ввиду малости угла α примите $\sin\alpha\approx\alpha$, $\cos\alpha\approx 1$.

3.42. Запишите выражение для мощности, рассеиваемой во внешней цепи. Эта мощность зависит от сопротивления внешней цепи: $P=\frac{\mathscr{E}^2}{(r+R)^2}R$. Из формулы видно, что мощность равна нулю, если внешнее сопротивление равно нулю, и стремится к нулю, если внешнее сопротивление увеличивается до бесконечности. В таких случаях изменения функции должен существовать максимум. Он и есть! Максимальная мощность выделяется на внешнем сопротивлении тогда, когда оно равно внутреннему. Если вы это забыли, возьмите производную от функции зависимости мощности от внешнего сопротивления и приравняйте эту производную к нулю.

$$P_{\max}=\frac{\mathscr{E}^2}{4R};\ I=\frac{\mathscr{E}}{2R};\ R=r.$$

3.43. Запишите закон Джоуля-Ленца для количества теплоты, которая выделяется за один импульс. Определите число импульсов за время t. Массу выразите через плотность и объем. Сопротивление запишите через удельное сопротивление. Вам пришлось ввести неизвестную величину — длину проволоки. Не бойтесь! Эта величина сократится при получении общего выражения. Здесь полезно еще раз подчеркнуть, что не следует получать промежуточных значений. Получите конечный результат в общем виде, т. е. через исходные данные. Только после этого ищите численное значение необходимой величины.

3.44. Запишите закон сохранения энергии. Мощность, расходуемая для питания лазера, идет на создание напряжения и тока и рассеивается на внутреннем сопротивлении. КПД лазерной установки равен отношению полезной световой мощности к мощности, расходуемой для питания лазера.

В следующих задачах рассматривается движение заряженных частиц в магнитном поле. Вспомните о силе Лоренца — силе, действующей на заряженную частицу, влетающую в магнитное поле: $F_Л=qvB\sin\alpha$, где q — заряд, v — скорость, B — вектор магнитной индукции, α — угол между направлением скорости и вектора магнитной индукции. Направление силы определяется правилом левой руки: силовые линии магнитного поля входят в ладонь, все пальцы указывают направление скорости, а отогнутый большой палец показывает направление силы Лоренца, действующей на положительно заряженную частицу, для отрицательно заряженной частицы сила направлена в противоположную сторону.

Частицы, влетающие перпендикулярно силовым линиям поля, движутся по окружности. Частицы, влетающие со скоростью, направленной под углом к силовым линиям, движутся по спирали.

3.45. Электрон участвует в двух независимых движениях: равномерном движении по окружности со скоростью $v_\perp=v\sin\alpha$ и равномерном прямолинейном движении со скоростью $v_\parallel=v\cos\alpha$. Радиус окружности спирали определите, записав уравнение второго закона Ньютона для этого движения, вспомните о центростремительном ускорении (см. задачи 1.37—1.50). Определите шаг спирали как расстояние, пройденное при равномерном движении за период обращения по окружности.

3.46. Запишите уравнение второго закона Ньютона для движения электрона по окружности в поле ядра и в совместных полях ядра и внешнего магнитного поля. Центростремительное ускорение запишите через частоту.

3.47. На электрон действуют магнитное и электростатическое поля. В магнитном поле электрон двигался бы по окружности или по спирали; в электростатическом или по прямой с ускорением, или по параболе. В задаче электрон смещается вдоль поля, и его начальная скорость перпендикулярна силовым линиям магнитного поля. Он движется по спирали с переменным шагом. Шаг витка спирали определяется как расстояние при равноускоренном движении; ускорение электрона в этом движении создается силой электростатического поля. Запишите законы Ньютона для этих движений. Решите полученные уравнения. Центростремительное ускорение запишите через линейную скорость. Число витков спирали свяжите с временем движения и с периодом движения по окружности.

Следующие задачи рассматривают появление ЭДС индукции и ЭДС самоиндукции при изменении потока магнитного поля через контур или в цепи.

Закон Фарадея и правило Ленца определяют значение и направление этих ЭДС.

3.48. Вспомните закон электромагнитной индукции Фарадея $\mathscr{E}=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. Магнитный поток определяется по формуле $\Phi=BS\cos\alpha$, где B — вектор магнитной индукции, S — площадь рамки, α — угол между вектором магнитной индукции и нормалью к рамке. В этой задаче изменяется только вектор $\vec{B}$.

3.49. Запишите закон Фарадея для ЭДС индукции. В этой задаче изменяется угол между вектором $\vec{B}$ и нормалью к рамке.

3.50. Используйте закон электромагнитной индукции Фарадея, закон Ома и формулу связи силы тока с зарядом, протекающим по катушке.

3.51. Используйте закон Ома и закон сохранения энергии.

3.52. Используйте закон сохранения энергии, выразив механическую работу через потенциальную энергию груза, а также закон Ома для полной цепи с учетом ЭДС индукции.

3.53. Используйте закон электромагнитной индукции Фарадея, выразив индуктивность катушки из формулы Томсона.

IV. ОПТИКА

Для решения задач 4.1—4.11 необходимо вспомнить законы геометрической оптики.

1. *Законы отражения.* Луч падающий, луч отраженный и перпендикуляр, проведенный в точку падения к отражающей поверхности, лежат в одной плоскости. Угол падения равен углу отражения.

2. *Законы преломления.* Луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр, восстановленный в точке падения луча на границу раздела двух сред, лежат в одной плоскости. Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно обратному отношению абсолютных показателей преломления сред:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{n_\beta}{n_\alpha}.$$

Кроме того, в этих задачах часто необходимо пользоваться приближением для малых углов: $0<\alpha<10°$, $\sin\alpha\approx\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha\approx\alpha$. 1 радиан $\approx 57{,}3°$; $1°\approx\frac{1}{57{,}3}$ радиан.

4.1. Скорость света в веществе в n раз меньше скорости света в вакууме, где n — абсолютный показатель преломления данной среды.

4.2. Воспользуйтесь законами отражения и преломления света; вспомните тригонометрическое соотношение для синуса разности углов: $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$.

4.3. Постройте ход лучей через пластинку. Используйте закон отражения и преломления света, а также тригонометрические соотношения для тангенса угла и синуса двойного угла:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}};$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

4.4. Постройте ход лучей согласно условию задачи. Вспомните свойство углов равнобедренного треугольника.

4.5. Постройте ход лучей. Луч, падающий на грань перпендикулярно, проходит, не преломляясь. Вспомните явление полного отражения: луч, падающий из оптически более плотной среды, на границе со средой, оптически менее плотной (т. е. показатель преломления первой среды больше показателя преломления второй среды: $n_1>n_2$), не преломляется, а только отражается, если угол α больше угла α_0, называемого углом полного отражения, при этом $\sin\alpha_0=\frac{n_1}{n_2}$. Вспомните: сумма углов треугольника равна 180°.

4.6. Вспомните свойства вертикальных, смежных углов. Докажите сначала связь между углом преломления тонкой призмы и углом между падающим и выходящим из призмы лучами. Затем докажите, что мнимые изображения источника находятся от призмы на расстояниях, равных расстоянию источника от призмы. Воспользуйтесь свойством малых углов.

4.7. Воспользуйтесь решением задачи 4.6. Постройте ход лучей через призму, взяв крайние лучи пучка.

4.8. Запишите закон преломления для лучей, падающих на каждую границу. Постройте ход лучей.

4.9. Вспомните условия полного отражения на границе вода — воздух.

4.10. Постройте ход лучей. Вспомните свойство смежных углов.

4.11. Вспомните свойство углов равнобедренного прямоугольного треугольника. Запишите закон преломления. Постройте ход лучей.

4.12. Постройте ход лучей. Запишите закон преломления и отражения. Воспользуйтесь указанием к задаче 4.5.

4.13. Постройте ход лучей. Вспомните, что касательная перпендикулярна радиусу.

4.14. Постройте ход лучей через пластинку, используйте закон преломления. Рассмотрите прямоугольные треугольники.

4.15. Вспомните, что оптическая длина хода луча в пластинке равна геометрическому ходу, умноженному на абсолютный показатель преломления вещества пластинки.

4.16. Вспомните условие для полного отражения на границе вода — воздух:

$$\sin\alpha_0=\frac{1}{n}.$$

В следующих задачах (4.17—4.31) используется формула тонкой линзы: $\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}$, где $\frac{1}{F}=D$ — оптическая сила линзы, F —

фокусное расстояние, d — расстояние от предмета до линзы, f — расстояние от изображения до линзы.

Увеличение $\Gamma=\frac{H}{h}=\frac{f}{d}$, где H — размер изображения, h — размер предмета.

Вывод формулы тонкой линзы приведен в решении задачи 4.17.

Во всех этих задачах необходимо провести построение изображения.

4.17. Не забудьте рассмотреть два случая увеличения линзы. Во-первых, когда предмет расположен между фокусом и двойным фокусом и, во-вторых, когда предмет расположен между фокусом и линзой. Во втором случае в формуле линзы стоит знак «минус» перед дробью $\frac{1}{f}$, так как изображение мнимое.

4.18. Рассмотрите получение увеличенного действительного и мнимого изображений.

4.19. Учтите симметричность формулы линзы относительно d и f при получении действительных изображений предмета. Кроме того, расстояние до экрана не изменяется, следовательно,

$$d_1=f_2,\ d_2=f_1.$$

4.20. Воспользуйтесь указанием к задаче 4.19. Построив ход лучей, рассмотрите подобие треугольников.

4.21. Увеличение линзы можно определять как отношение высоты изображения к высоте предмета, а также как отношение f/d, что следует из подобия треугольников.

4.22. Для построения изображения точки, лежащей на оптической оси, воспользуйтесь свойством фокальной плоскости — плоскости, перпендикулярной главной оптической оси и проходящей через фокус. Лучи, параллельные побочной оптической оси собирающей линзы, пересекаются за линзой в одной и той же точке фокальной плоскости.

В нашем случае лучи, падающие на рассеивающую линзу параллельно побочной оптической оси, за линзой рассеиваются так, что продолжения этих лучей пересекаются в одной и той же точке фокальной плоскости.

4.23. Постройте ход лучей в собирающей и рассеивающей линзах. Запишите формулы тонкой линзы для двух случаев. Учтите, что оптическая сила рассеивающей линзы отрицательная и перед дробью $\frac{1}{f}$ стоит знак «минус», так как изображение формируется не самими лучами, а их продолжениями; изображение мнимое.

4.24. Постройте изображение источника, воспользовавшись свойством фокальной плоскости. Учтите, что после передвижения линзы, луч, проходящий через оптический центр, должен

проходить и через источник, и через его изображение. Рассмотрите подобие треугольников.

4.25. Для нахождения максимальной высоты подъема воспользуйтесь законом сохранения энергии. Учтите, что действительное изображение предмета получается, когда предмет находится от линзы на расстоянии больше фокусного. Время движения легко получить, записав уравнение движения шарика в поле тяжести Земли. Учтите при этом, что время подъема равно времени падения. Задача решается легче, если рассмотреть падение шарика с максимальной высоты до фокуса линзы.

4.26. Из формулы тонкой линзы получим зависимость расстояния до изображения от фокусного расстояния. Увеличение получим из формулы $\Gamma=f/d$.

4.27. Примените формулу тонкой линзы.

4.28. Рассмотрите глаз как тонкую линзу. Расстояние до предмета равно расстоянию наилучшего зрения для данного глаза, расстояние до изображения равно расстоянию от хрусталика до сетчатки глаза. Применяя очки, изменяем расстояние наилучшего зрения. Считаем систему линз хрусталик — очки системой, для которой оптические силы линз просто складываются.

4.29. Выведите соотношение для увеличения линз. Для этого постройте ход лучей. Помните, что лупа — это собирающая линза, формирующая увеличенное мнимое изображение.

4.30. Постройте изображения источника, рассматривая лучи, прошедшие только через одну собирающую линзу, а также лучи, прошедшие через обе линзы. Для системы двух линз оптическая сила равна сумме оптических сил каждой линзы.

4.31. Воспользуйтесь формулой тонкой линзы, определите расстояние до изображения, которое получалось бы в отсутствие зеркала. На зеркало падает сходящийся пучок лучей, прошедших через линзу. Отражаясь от зеркала, этот пучок формирует первое изображение. После второго прохождения через линзу формируется второе изображение. Постройте ход лучей в масштабе, это поможет вам решить задачу.

4.32. Постройте ход лучей для покоящегося источника и для источника, находящегося на некотором расстоянии от покоящегося (первоначального положения). Для построения изображения пользуйтесь свойством фокальной плоскости. Время определяется из соотношения для пути при равнопеременном движении без начальной скорости.

4.33. Рассмотрите преломление света на каждой из преломляющих поверхностей. Запишите законы преломления, учитывая малость углов падения и преломления. Учтите, что линза тонкая. Постройте ход лучей. Из треугольников получите связь между углами и расстояниями.

4.34. Воспользуйтесь указаниями к задаче 4.33. Показатель преломления воздуха примите равным единице.

4.35. Постройте ход лучей. При построении пользуйтесь свойством фокальной плоскости. На зеркало падает расходящийся световой пучок и после отражения образует мнимое изображение. Лучи, отраженные от зеркала, вновь проходят через линзу и формируют еще одно изображение.

4.36. Рассмотрите лучи, идущие от удаленных предметов. Угол, который луч составляет с главной оптической осью, считайте малым. Учтите также, что объектив формирует изображение удаленных предметов практически в своей фокальной плоскости. Увеличение определяется как отношение угловых размеров предмета и изображения.

4.37. Воспользуйтесь указаниями к задаче 4.36. Постройте ход лучей.

4.38. Установление зрительной трубы на бесконечность означает, что параллельные лучи от предмета из системы также выходят параллельными. При этом совпадают задний фокус объектива и передний фокус окуляра. В случае если предмет находится вблизи объектива, то изображение, получаемое от объектива, должно находиться в фокальной плоскости окуляра.

4.39. Постройте ход лучей в микроскопе. Учтите, что изображение, формируемое объективом, рассматривается через окуляр как через лупу. Максимальное увеличение достигается в том случае, когда объектив формирует изображение в фокальной плоскости окуляра. Вычислите для объектива линейное увеличение.

4.40. Рассмотрите оптическую силу системы линза — зеркало. Учтите, что оптическая сила зеркала равна нулю. Не забудьте, что свет дважды проходит через линзу.

4.41. Рассмотрите систему линз. Воспользуйтесь решением задач 4.33 и 4.34.

4.42. Вспомните явление дисперсии света. Воспользуйтесь соотношением, связывающим угол отклонения луча с преломляющим углом призмы, полученным нами в задаче 4.6.

4.43. Воспользуйтесь указаниями к задачам 4.42 и 4.33.

В следующих задачах используется формула Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2},$$

где $h\nu$ — энергия фотонов, A — работа выхода, h — постоянная Планка, $\frac{mv^2}{2}$ — кинетическая энергия вылетающих электронов.

Частота фотона $\nu = \frac{c}{\lambda}$, где c — скорость света, λ — длина волны фотона.

4.44. Фотоэффект наблюдается в случае, если энергия фотонов больше работы выхода электронов.

4.45. Красной границей фотоэффекта называется наибольшая длина волны фотона, при которой еще наблюдается фотоэффект.

4.46. Вспомните формулу для вычисления работы электростатического поля: $W = eU$, где e — заряд электрона, U — напряжение (разность потенциалов). Запишите закон сохранения энергии.

4.47. Запишите уравнение Эйнштейна для двух различных длин волн. Фототок равен нулю, когда электроны полностью задерживаются полем, т. е. когда кинетическая энергия фотоэлектронов равна работе поля.

4.48. Ток насыщения пропорционален заряду электронов и числу электронов, выбитых с поверхности в единицу времени. Число выбитых электронов пропорционально числу фотонов, падающих на поверхность катода в единицу времени. Отношение мощности излучения к энергии одного фотона равно числу фотонов, падающих на поверхность в единицу времени.

4.49. Запишите уравнение Эйнштейна. Кинетическая энергия фотоэлектронов равна потенциальной энергии их в поле шара. Вспомните связь напряжения на шаре с зарядом шара и с его электроемкостью.

РЕШЕНИЯ

I. МЕХАНИКА

1.1. Для нахождения скорости надо взять производную по времени от функции координаты $x' = A + 2Bt$. Подставив численные значения, получим $v = 2 - 4t$. Для нахождения ускорения надо взять производную от функции скорости по времени: $v' = 2B$, $a = -4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Предположим, вы забыли, как берутся производные, или никогда не изучали математический анализ. Как быть? Сравните свои соотношения с общим выражением зависимости координаты и скорости от времени:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad v = v_0 + at.$$

Коэффициент перед t есть начальная скорость v_0, в нашем случае она равна $A = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, а коэффициент перед t^2 равен ускорению, деленному на два. Получим:

$$B = \frac{a}{2}, \quad a = 2B = -4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Графики показаны на рисунке 1.1. Линейная функция строится

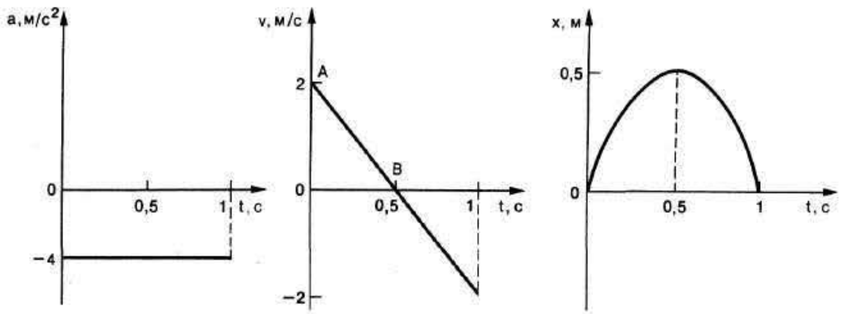


Рис. 1.1

по двум точкам ($t = 0$, $v = 2$), ($t = 0{,}5$ с, $v = 0$). График зависимости координаты от времени строим как параболу, симметричную относительно оси и проходящую через вершину (0,5 с; 0.5 м). Помните, что в тот момент, когда скорость равна нулю, на графике зависимости координаты от времени — вершина параболы.

Для определения пути, пройденного телом до остановки, вычислим площадь треугольника OAB, так как в момент остановки мгновенная скорость равна нулю, а площадь под графиком ско-

рости от времени определяет пройденный путь $l = 0{,}5$ м. Путь можно определить, подставив в уравнение $x(t)$ значение времени $t = 0{,}5$ с. Получим $x = 0{,}5$ м.

Ответ: $a = 2B$, $a = -4$ м/с^2, $l = 0{,}5$ м; рис. 1.1.

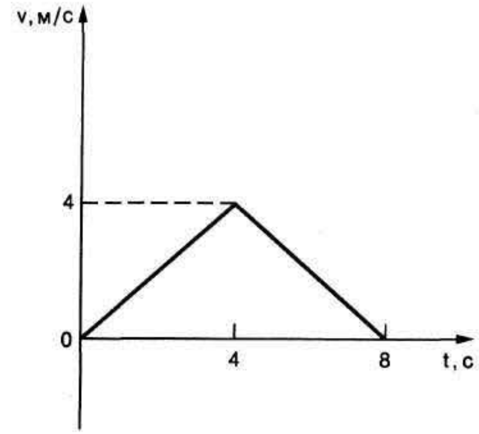
1.2. Ответ представлен на рисунках 1.2, 1.3, 1.4.

Для построения графиков запишем уравнения зависимости скорости и координаты от времени для всех трех случаев.

1) $v_0 = 0$.

Для $0 \leqslant t \leqslant 4$с $v = t$, $x = \frac{t^2}{2}$.

Для $4\text{с} \leqslant t \leqslant 8$с $v = 4 - (t - 4)$, $x = 8 + 4(t - 4) - (t - 4)^2/2$.



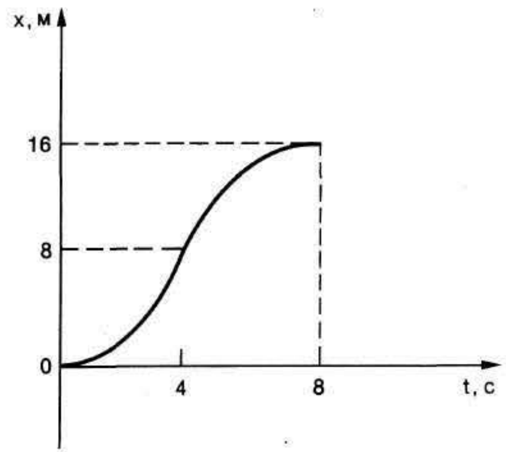


Рис. 1.2

В последних соотношениях от времени t отнимается 4, так как это движение начинается с момента времени $t_0=4$ с после выбранного нами начала отсчета времени. Начальная скорость для этого движения легче всего вычисляется через площадь под графиком зависимости ускорения от времени, а начальная координата — через площадь под графиком зависимости скорости от времени.

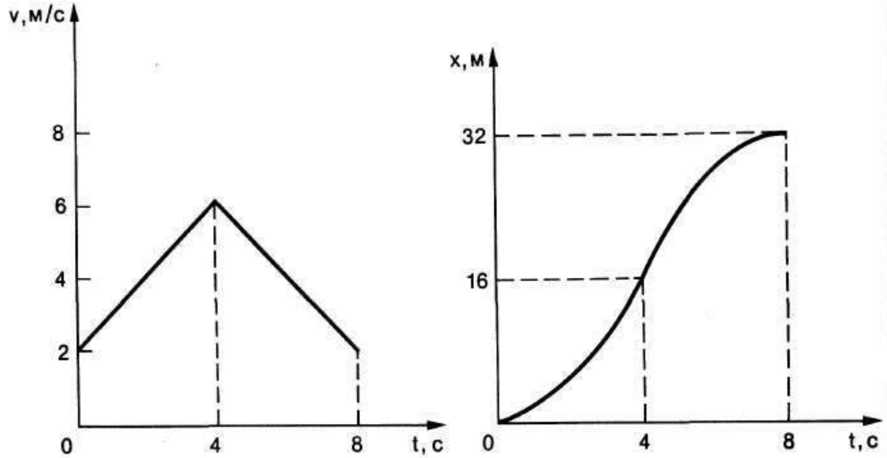


Рис. 1.3

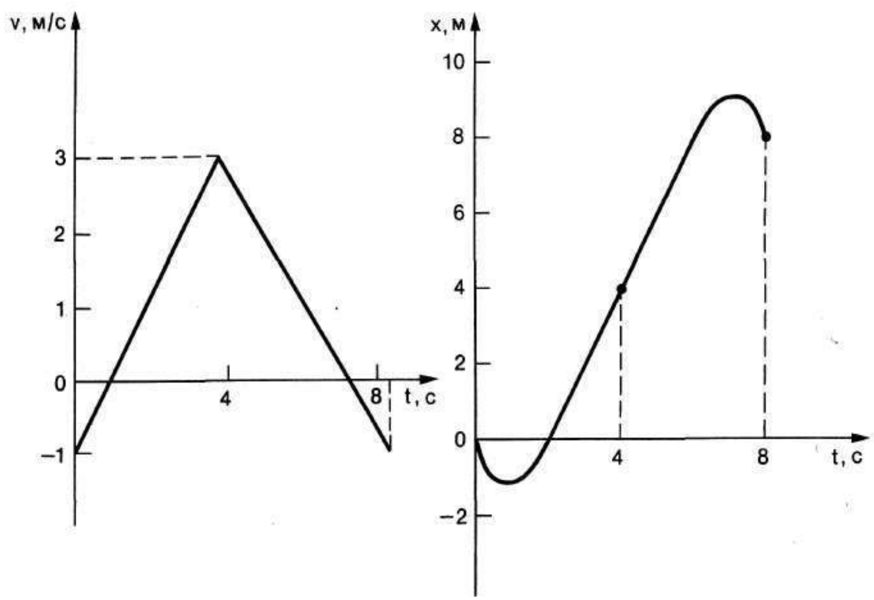


Рис. 1.4

2) $v_0=2$ м/с.

Для $0\leqslant t\leqslant 4$ с $\quad v=2+t,\ x=2t+t^2/2$.

Для 4 с$\leqslant t\leqslant 8$ с $\quad v=6-(t-4),\ x=16+6(t-4)-(t-4)^2/2$.

3) $v_0=-1$ м/с.

Для $0\leqslant t\leqslant 4$ с $\quad v=-1+t,\ x=-t+t^2/2$.

Для 4 с$\leqslant t\leqslant 8$ с $\quad v=3-(t-4),\ x=4+3(t-4)-\frac{(t-4)^2}{2}$.

Пройденный путь определим через площадь под графиком зависимости скорости от времени. Помните: складываем модули площадей.

Ответ: $l_1=16$ м, $l_2=32$ м, $l_3=10$ м.

1.3. Первая точка в течение первой секунды двигалась с ускорением $a_1=2$ м/с^2, в течение второй и третьей секунд двигалась с ускорением $a_2=-2$ м/с^2, а в течение четвертой секунды — равномерно (см. решение задачи 1.2.).

Вторая точка в течение первых трех секунд двигалась с ускорением $a_1=\frac{2}{3}\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, в течение четвертой секунды — с ускорением $a_2=-4$ м/с^2. Ускорение из графиков зависимости скорости от времени определяется или как приращение скорости в единицу времени, или через тангенс угла наклона графика скорости к оси времени. Графики зависимости ускорения и координаты представлены на рисунке 1.5.

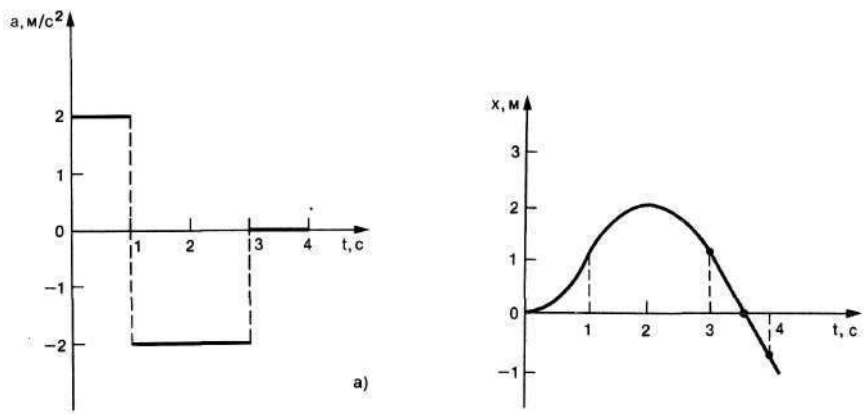


Рис. 1.5, *а*

Для построения графиков зависимости координаты от времени напищем уравнения движения. Для первой точки (рис. 1.5, *а*):

$$0\leqslant t\leqslant 1\text{ с},\ x=t^2;$$
$$1\text{ с}\leqslant t\leqslant 3\text{ с},\ x=1+2(t-1)-(t-1)^2;$$
$$3\text{ с}\leqslant t\leqslant 4\text{ с},\ x=1-2(t-3).$$

Для второй точки (рис. 1.5, *б*):

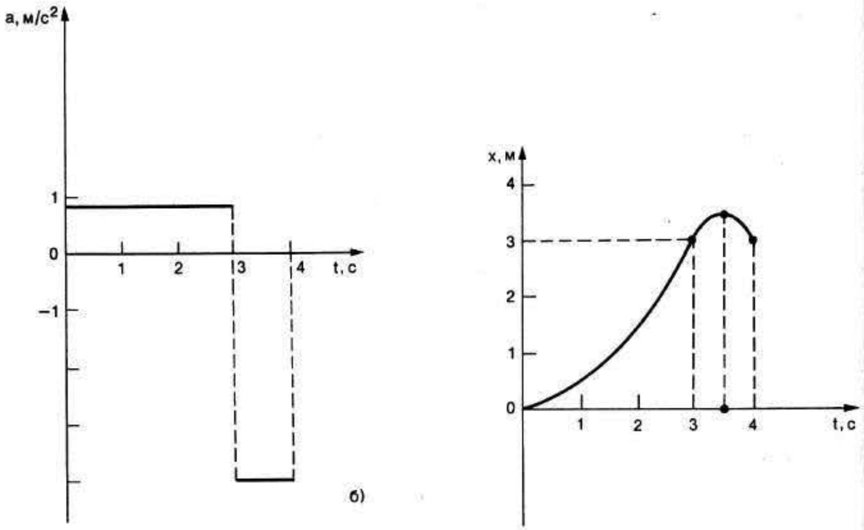


Рис. 1.5, *б*

$$0 \leqslant t \leqslant 3 \text{ с}, \ x=\frac{1}{3}t^2;$$

$$3 \text{ с} \leqslant t \leqslant 4 \text{ с}, \ x=3+2(t-3)-2(t-3)^2.$$

1.4. Выберем систему отсчета, связанную с Землей; ось OX — горизонтальная, ось OY — вертикальная (рис. 1.6). Запишем уравнения движения предмета относительно этих осей. По оси OX движение равномерное, по оси OY — равнопеременное с ускорением свободного падения.

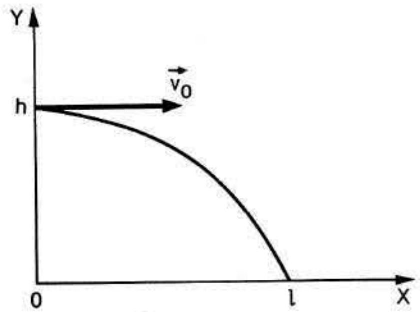


Рис. 1.6

$$x=v_0 t, \qquad (1)$$

$$y=h-\frac{gt^2}{2}. \qquad (2)$$

Приравняв правую часть второго уравнения к нулю, определим время падения: $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$. Расстояние определим, подставив это значение времени в первое уравнение: $l=v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Проверим размерность: $[l]=\frac{\text{м}}{\text{с}}\left(\frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{м}}\right)^{1/2}=\text{м}$.

Ответ: $l=v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$, $l\approx 10{,}6$ м.

1.5. Начало системы координат свяжем с точкой вылета снаряда; ось OX — горизонтальная, ось OY — вертикальная (рис. 1.7). Разложим скорость снаряда в момент вылета на составляющие по осям OX и OY:

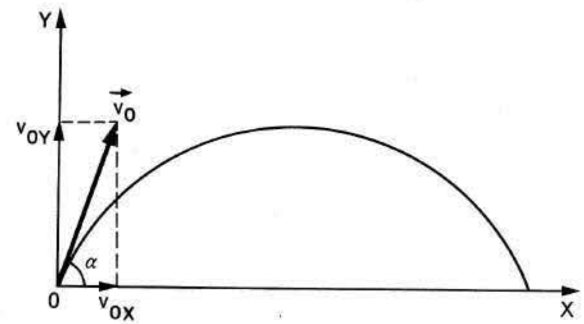


Рис. 1.7

$$v_{0x}=v_0\cos\alpha, \qquad (1)$$

$$v_{0y}=v_0\sin\alpha. \qquad (2)$$

Запишем уравнения движения:

$$x=(v_0\cos\alpha)\,t, \qquad (3)$$

$$y=tv_0\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}. \qquad (4)$$

Для нахождения времени полета приравняем правую часть формулы (4) к нулю: $T=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}$. Время падения равно времени подъема: $t_\text{п}=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$. Окончательно наибольшая высота

$$H=y(t_\text{п})=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}=\frac{T^2g}{8},$$

$$H=\frac{gT^2}{8}.$$

Проверим размерность:

$$[H]=\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{с}^2=\text{м}.$$

Ответ: $H=\frac{gT^2}{8}$, $H=176{,}4$ м.

1.6. Запишем зависимость координаты от времени для движения тела, брошенного вертикально вверх. Ось OY направлена вертикально вверх:

$$y=v_0t-\frac{gt^2}{2}.$$

Время, через которое камень окажется на высоте H, т. е. его координата y будет равна H, определим из квадратного уравнения $\frac{gt^2}{2}-v_0t+H=0$. У этого уравнения два решения:

$$t=\frac{v_0\pm\sqrt{v_0^2-2gH}}{g};\ t_1\approx 0{,}2\ \text{с},\ t_2\approx 2{,}8\ \text{с}.$$

Действительно, на этой высоте камень оказывается дважды: когда движется вверх и когда падает вниз. Внимание! Оба эти движения описываются одним и тем же уравнением!

Потенциальную энергию относительно Земли определим по формуле $E_п=mgH$. Полная механическая энергия равна начальной кинетической энергии, так как мы пренебрегаем сопротивлением воздуха: $E=\frac{mv_0^2}{2}$.

Проверим размерность:

$$[E]=\text{кг}\cdot\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}=\text{Дж};\ [E_п]=\text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м}=\text{Дж}.$$

Ответ: $t=\frac{v_0\pm\sqrt{v_0^2-2gH}}{g}$;

$t_1\approx 0{,}2$ с, $t_2\approx 2{,}8$ с.

$$E_п=mgH\approx 5{,}9\ \text{Дж};\ E=\frac{mv_0^2}{2}=22{,}5\ \text{Дж}.$$

1.7. *I способ.* Решим задачу стандартным методом, используя кинематические уравнения для свободного падения. Высота падения определится по формуле

$$H=\frac{gT^2}{2},$$

где g — ускорение свободного падения ($g=9{,}8$ м/с^2), T — время всего падения.

В первую секунду тело прошло путь $l_1=\frac{gt_1^2}{2}$, $t_1=1$ с. За время $T-t_1$ оно прошло путь $l_2=\frac{g(T-t_1)^2}{2}$.

Расстояние, пройденное телом за последнюю секунду, равно

$$l=H-l_2,\ l=\frac{gT^2}{2}-\frac{g(T-t_1)^2}{2}.$$

Воспользуемся условием задачи $l=nl_1$.

$$\frac{gT^2}{2}-\frac{g(T-t_1)^2}{2}=n\frac{gt_1^2}{2};\ \text{откуда}\ T=\frac{n+1}{2}t_1.$$

$$H=\frac{g(n+1)^2t_1^2}{8}.$$

II способ графический. График зависимости скорости от времени для свободного падения представлен на рисунке 1.8. Пло-

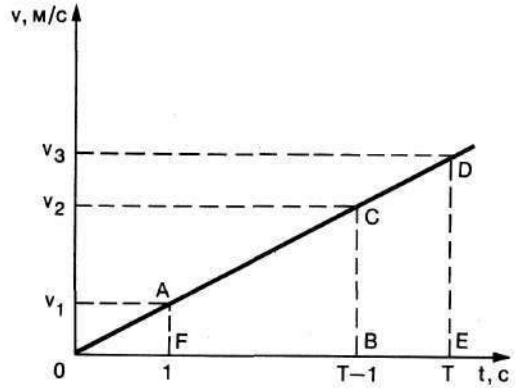


Рис. 1.8

щадь под графиком численно равна пройденному пути. Используем условие задачи: площадь трапеции $BCDE$ в $n=7$ раз больше площади треугольника OAF.

$$n\frac{v_1\cdot 1}{2}=\frac{v_2+v_3}{2}\cdot 1.$$

Скорости определяются для каждого момента времени по формуле $v=gt$:

$$v_1=gt_1,\ v_2=g(T-t_1),\ v_3=gT,$$

где T — время падения, $t_1=1$ с. Тогда $n\frac{gt_1}{2}=\frac{g(T-t_1+T)}{2}$, $T=\frac{n+1}{2}t_1$; $n=7$, $T=4$ с. Высота определится как площадь всего треугольника ODE: $H=\frac{gT^2}{2}$.

Ответ: $T=\frac{n+1}{2}t_1$, $T=4$ с; $H=\frac{(n+1)^2gt_1^2}{8}$, $H=78{,}4$ м.

1.8. Решим задачу графически: на рисунке 1.9 представлен график зависимости скорости от времени при свободном падении. Вам уже известно, что площадь под графиком численно равна пройденному пути. Воспользуемся условием задачи: площадь трапеции $ABCD$ в $n=2$ раза меньше площади трапеции $DCEP$. Напомним: площадь трапеции равна полусумме оснований, умноженной на высоту.

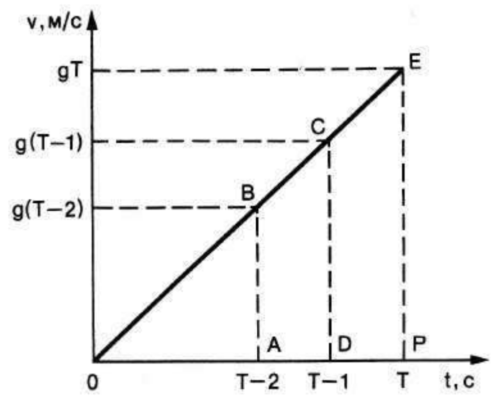


Рис. 1.9

Получим $\frac{g\,(T-2+T-1)}{2}\,n=\frac{g\,(T-1+T)}{2}$. После несложных преобразований, получим $(2T-3)\,n=2T-1$,

$$T=\frac{3n-1}{2\,(n-1)}.$$

Высота, с которой падало тело, определится как площадь треугольника OEP: $H=\frac{gT^2}{2}$, так как по условию задачи $n=2$, то, определив время $T=2{,}5$ с, легко определим высоту $H\approx 30{,}6$ м. Давайте исследуем полученное для времени выражение. Из условия ясно, что время всего движения не может быть меньше 2 с. Следовательно, $\frac{3n-1}{2\,(n-1)}\geqslant 2$, или $3n-1\geqslant 4n-4$.

Окончательно $n\leqslant 3$. Из проведенного исследования видно, что при составлении задачи значения для n надо давать осторожно, не попасть впросак, а то получим время T меньше 2 с.

Ответ: $T=\frac{3n-1}{2\,(n-1)}$, $T=2{,}5$ с;

$$H=\frac{g\,(3n-1)^2}{8\,(n-1)^2},\quad H\approx 30{,}6 \text{ м}.$$

1.9. *I способ*. Уравнения движения обоих тел вдоль вертикальной оси OY:

$$y_1=v_0t-\frac{gt^2}{2}, \tag{1}$$

$$y_2=v_0\,(t-\tau)-\frac{g\,(t-\tau)^2}{2}. \tag{2}$$

Приравняем координаты, из получившегося уравнения определим время встречи: $v_0t-\frac{gt^2}{2}=v_0t-v_0\tau-\frac{gt^2}{2}+gt\tau-\frac{g\tau^2}{2}$,

$t=\frac{v_0}{g}+\frac{\tau}{2}$.

Подставим значение времени в уравнение для координаты:

$$H=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g\tau^2}{8}.$$

II способ графический. График зависимости координаты от времени для движения тела, брошенного вертикально вверх, представлен на рисунке 1.10. Все время движения определится, если

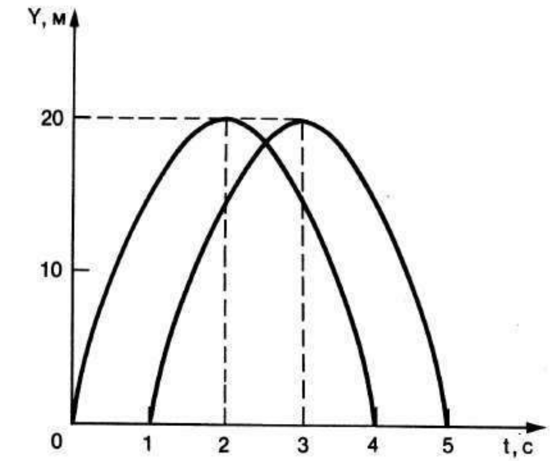


Рис. 1.10

приравняем уравнение (1) к нулю. Получим $t=\frac{2\,v_0}{g}$. График зависимости координаты от времени для второго тела смещен относительно начала координат на $\tau=1$ с. Из условий симметрии определяем, что встреча произошла в момент времени $t=2{,}5$ с.

Ответ: $t=\frac{v_0}{g}+\frac{\tau}{2}$, $t=2{,}5$ с;

$$H=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g\tau^2}{8},\quad H=18{,}75 \text{ м}.$$

1.10. Кинетическая энергия в момент бросания $E_0=\frac{mv_0^2}{2}$. В верхней точке траектории вертикальная составляющая скорости равна нулю (см. задачу 1.5), следовательно, кинетическая энергия равна $E_к=\frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2}$. Из условия задачи эта энергия равна 25% от начальной энергии, т. е. $\frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2}=0{,}25\,\frac{mv_0^2}{2}$, откуда получаем $\cos\alpha=1/2$, $\alpha=60°$. Потенциальная энергия относительно точки бросания равна $E_п=mgH$, где H — максимальная высота подъема, определяемая по формуле $H=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$.

Следовательно, $v_0^2 = \frac{2gH}{\sin^2 \alpha}$. Высоту H выразим из соотношения для потенциальной энергии: $H = \frac{E_п}{mg}$. Начальная скорость определяется из формулы $v_0^2 = 2E_п/(m \sin^2 \alpha)$. Дальность полета $L = v_0^2 \sin 2\alpha / g$. Представляя выражение для квадрата начальной скорости, получим:

$$L = \frac{2E_п \sin 2\alpha}{mg \sin^2 \alpha} = \frac{4E_п \operatorname{ctg} \alpha}{mg}.$$

Проверим размерность:

$$[L] = \frac{Дж \cdot с^2}{кг \cdot м} = \frac{кг \cdot м^2 \cdot с^2}{с^2 \cdot кг \cdot м} = м;$$

$$[H] = \frac{Дж \cdot с^2}{кг \cdot м} = \frac{кг \cdot м^2 \cdot с^2}{кг \cdot м \cdot с^2} = м.$$

Предположим, вы забыли соотношения, связывающие дальность полета и максимальную высоту полета с начальной скоростью. Эти соотношения легко получить. Выберем систему координат, связанную с Землей, начало координат в точке бросания, ось OY вертикально вверх, ось OX горизонтально. Запишем уравнения движения по этим осям. Ускорение свободного падения направлено вертикально вниз. По оси OX движение равномерное.

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha, \\ y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Приравняем y к нулю, получим из уравнения $gt^2 - 2v_0 t \sin \alpha = 0$ время всего полета. Из симметрии траектории движения (параболы) легко заключить, что время подъема равно времени падения и равно $\frac{1}{2}$ всего времени полета: $t_1 = t_2 = \frac{1}{2} t = \frac{1}{2} \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$.
Подставив время всего движения в уравнение $x(t)$, получим дальность полета: $L = \frac{v_0^2 2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$.
Подставив время подъема в выражение для $y(t)$, получим максимальную высоту подъема: $H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}$.

Последнее соотношение можно получить проще: воспользуйтесь формулой для свободного падения с высоты $H = \frac{gt^2}{2}$, подставьте в эту формулу время падения.

Хочется заметить еще раз: необязательно помнить все соотношения, надо помнить основные соотношения и понятия, а остальные уметь выводить!

Ответ: $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 60°$;

$$H = E_п/(mg), \ H \approx 2{,}4 \ м;$$

$$L = \frac{4E_п \operatorname{ctg} \alpha}{mg}, \ L \approx 5{,}7 \ м.$$

1.11. В этой задаче рассматриваются только скорость и ее составляющие. В горизонтальном направлении нет никаких сил, следовательно, горизонтальная составляющая скорости не меняется. В вертикальном направлении на тело действует сила тяжести, тело движется с ускорением свободного падения g. Поэтому вертикальная составляющая скорости увеличивается: $v_в = v_0 \sin \alpha + gt$. Тангенс угла β определяется как отношение вертикальной составляющей скорости к горизонтальной составляющей (см. треугольник ABC на рис. 1.11.):

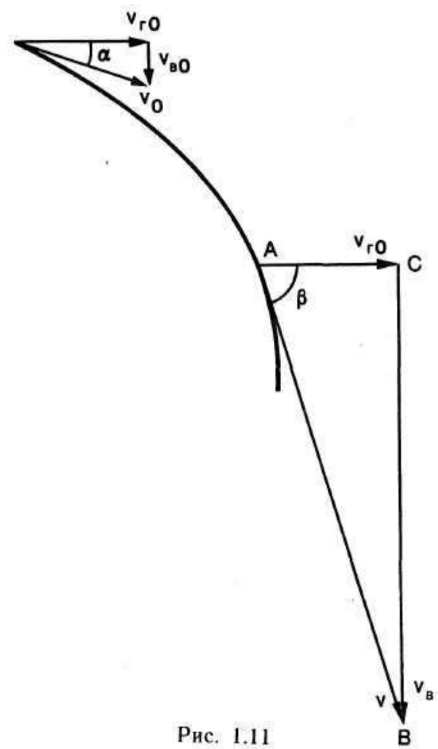


Рис. 1.11

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_0 \sin \alpha + gt}{v_0 \cos \alpha}.$$

Выразим время

$$t = (\operatorname{tg} \beta \, v_0 \cos \alpha - v_0 \sin \alpha)/g.$$

После некоторых математических преобразований получим:

$$t=\frac{v_0 \sin(\beta-\alpha)}{g\cos\beta}.$$

Изменение потенциальной энергии равно изменению кинетической — это следует из закона сохранения энергии для замкнутой системы тело — Земля; сопротивлением воздуха пренебрегаем, а сила тяжести — консервативная сила (работа этой силы не зависит от формы пути, а зависит только от начальной и конечной точек положения тела). Конечную скорость определим как векторную сумму скоростей (см. рис. 1.11). Численное значение этой скорости определим по теореме Пифагора для треугольника ACB:

$$v^2=v_0^2\cos^2\alpha+(v_0\sin\alpha+gt)^2.$$

Или из тригонометрических соотношений для треугольника ACB:

$$v=v_0\cos\alpha/\cos\beta.$$

Изменение потенциальной энергии:

$$\Delta E_{\text{п}}=\frac{mv_0^2}{2}-\frac{mv^2}{2}=\frac{m}{2}\left(v_0^2-v_0^2\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}\right),$$

$$\Delta E_{\text{п}}=\frac{mv_0^2}{2}\left(1-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}\right).$$

Проверим размерность:

$$[\Delta E_{\text{п}}]=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2}=\text{Дж};$$

$$[t]=\frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}\cdot\text{м}}=\text{с}.$$

Ответ: $t=\frac{v_0\sin(\beta-\alpha)}{g\cos\beta}$, $t=2$ с;

$$\Delta E_{\text{п}}=\frac{mv_0^2}{2}\left(1-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}\right),\ \Delta E_{\text{п}}=-160\ \text{Дж}.$$

1.12. Наибольшую высоту полета определим из закона сохранения энергии в поле тяжести Земли, учитывая, что в верхней точке траектории остается неизменной горизонтальная составляющая скорости:

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2}+mgH,\ H=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

Изменение импульса определим из разности векторов начальной и конечной скоростей (рис. 1.12): $\Delta\vec{p}=m\vec{v}_0-m\vec{v}$.

Учитывая, что $|\vec{v}_0|=|\vec{v}|$, получим $\Delta p=2(mv_0)\sin\alpha$. Изменение импульса можно также определить как импульс силы; импульс

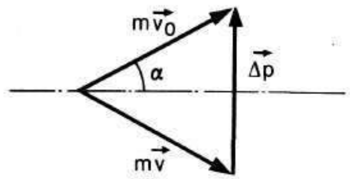


Рис. 1.12

силы равен произведению силы на время ее действия. На тело во время движения действует единственная сила — сила тяжести mg, а время равно времени полета. Это время мы уже определяли (см. решение задачи 1.10): $T=2v_0\sin\alpha/g$, $\Delta t=T$. Итак, $\Delta p=F\Delta t$, $\Delta p=2mv_0\sin\alpha$.

Ответ: $H=v_0^2\sin^2\alpha/(2g)$, $H=5$ м;

$$\Delta p=2mv_0\sin\alpha,\ \Delta p=10\ \text{кг}\cdot\text{м/с}.$$

1.13. Движение катера относительно течения равноускоренное, следовательно, время определится из соотношения, связывающего время и расстояние для этого движения: $l=\frac{at^2}{2}$, откуда $t=\sqrt{\frac{2l}{a}}$.

Проверим размерность: $[t]=\left(\frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{м}}\right)^{1/2}=\text{с}$. Катер будет за это время снесен течением на расстояние $s=vt$.

Ответ: $t=\sqrt{\frac{2l}{a}}$, $t\approx 85$ с;

$$s=v\sqrt{\frac{2l}{a}},\ s\approx 170\ \text{м}.$$

1.14. Время падения предмета определится из уравнения для свободного падения тела в поле тяжести Земли: $h=\frac{gt^2}{2}$, т. е. $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Скорость предмета в горизонтальном направлении относительно земли равна векторной сумме скоростей — скорости, с которой было брошено тело относительно вагона, $\vec{v}_0$, и скорости вагона $\vec{v}$:

$$\vec{v}_1=\vec{v}_0+\vec{v},\ v_1=\sqrt{v_0^2+v^2}.$$

Путь, пройденный телом за время падения:

$$s=\sqrt{v_0^2+v^2}\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Выразим скорость тела относительно вагона:

$$v_0=\sqrt{\frac{gs^2}{2h}-v^2}\,.$$

Проверим размерность:

$$[v_0]=\left(\frac{\text{м}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}}-\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}\right)^{1/2}=\frac{\text{м}}{\text{с}}\,.$$

Ответ: $v_0=\sqrt{\frac{gs^2}{2h}-v^2}$, $v_0\approx 8{,}7\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

1.15. Составим уравнения движения для двух тел, выбрав систему координат (ось OY — вертикальная с началом отсчета в точке бросания тела *1*, ось OX — горизонтальная). За начало отсчета времени выберем момент бросания тела *1* (рис. 1.13, *а*).

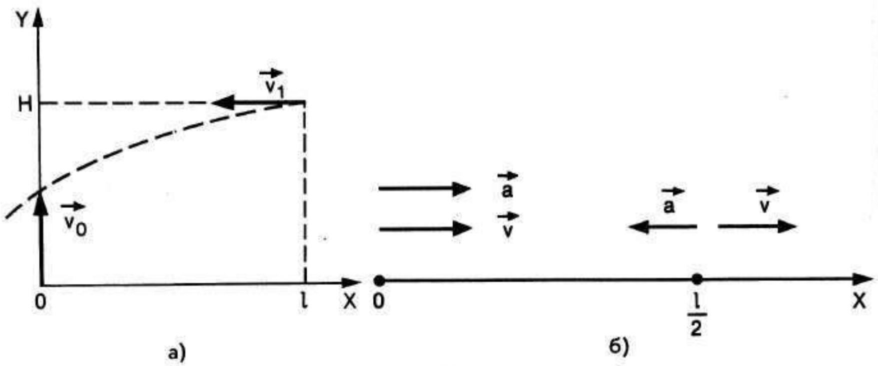


Рис. 1.13

$$\begin{cases} x_1=0, & (1)\\ y_1=v_0t-\dfrac{gt^2}{2}, & (2)\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2=l-v_1(t-\tau), & (3)\\ y_2=H-\dfrac{g(t-\tau)^2}{2}. & (4)\end{cases}$$

В момент столкновения координаты тел равны:

$$v_0t-\frac{gt^2}{2}=H-\frac{g(t-\tau)^2}{2}, \qquad (5)$$

$$0=l-v_1(t-\tau). \qquad (6)$$

Из соотношения (6) получим время движения до столкновения:

$$t=\frac{l+v_1\tau}{v_1}\,.$$

Подставим это выражение в (5), после преобразований получим квадратное уравнение

$$\tau^2+2\tau\left(\frac{l}{v_1}-\frac{v_0}{g}\right)-\frac{2v_0l}{gv_1}+\frac{2H}{g}=0,$$

решением которого будет время запаздывания

$$\tau=\frac{v_0}{g}-\frac{l}{v_1}\pm\sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2+\left(\frac{l}{v_1}\right)^2-\frac{2H}{g}}\,.$$

Проверим размерность:

$$[\tau]=\frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}\cdot\text{м}}-\frac{\text{м}\cdot\text{с}}{\text{м}}\pm\left(\frac{\text{м}^2\cdot\text{с}^2}{\text{м}^2}\right)^{1/2}=\text{с}.$$

Ответ: $\tau=\frac{v_0}{g}-\frac{l}{v_1}\pm\sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2+\left(\frac{l}{v_1}\right)^2-\frac{2H}{g}}$, $\tau_1=0{,}6$ с, $\tau_2=3{,}4$ с.

1.16. Начальная скорость человека относительно земли равна скорости эскалатора относительно земли, а ускорение человека относительно земли равно ускорению человека относительно эскалатора:

$$\vec{v}_{\text{чо}}=\vec{v},$$
$$\vec{a}_{\text{ч}}=\vec{a}.$$

Выберем ось OX, направленную вдоль движения эскалатора (рис. 13, *б*). Уравнения движения до середины:

$$x_1=vt_1+\frac{at_1^2}{2},\ \ x_1=\frac{l}{2},$$

и обратно:

$$x_2=\frac{l}{2}+vt_2-\frac{at_2^2}{2},\ \ x_2=0.$$

Решая квадратные уравнения, находим время движения на каждом участке и затем общее время:

$$t_1=-\frac{v}{a}+\frac{1}{a}\sqrt{v^2+la}\,,$$

$$t_2=\frac{v}{a}+\frac{1}{a}\sqrt{v^2+la}\,,$$

$$t=2\,\frac{\sqrt{v^2+la}}{a}\,.$$

Проверим размерность:

$$[t]=\frac{\left(\dfrac{\text{м}^2}{\text{с}^2}+\dfrac{\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\right)^{1/2}}{\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}}=\text{с}.$$

Ответ: $t=2\,\frac{\sqrt{v^2+la}}{a}$, $t\approx 47{,}6$ с.

1.17. Будем рассматривать самолет как материальную точку, т. е. при выключенном двигателе это — тело, двигающееся под углом к горизонту в поле тяжести Земли. Систему отсчета свяжем с Землей, начало координат в месте вылета снаряда (рис. 1.14, *а*). Запишем уравнения движения

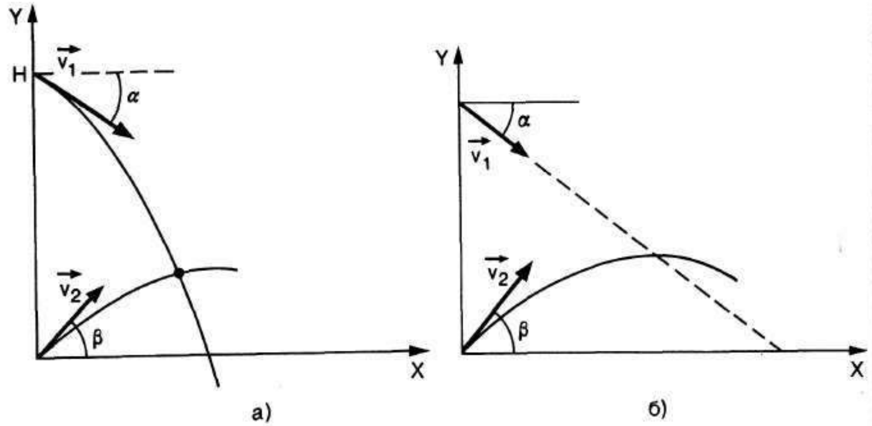


Рис. 1.14

для самолета $\begin{cases} x_c = tv_1 \cos\alpha, \\ y_c = H - v_1\left(t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}\right); \end{cases}$

для снаряда $\begin{cases} x_{сн} = tv_2 \cos\beta, \\ y_{сн} = v_2\left(t \sin\beta - \dfrac{gt^2}{2}\right). \end{cases}$

В момент попадания их координаты равны (по горизонтали и снаряд и самолет проходят одинаковые расстояния):

$$tv_1 \cos\alpha = tv_2 \cos\beta.$$

Определим из этого соотношения угол β — угол, под которым производится выстрел: $\cos\beta = v_1 \cos\alpha / v_2$. Из условия равенства координат по оси OY получим:

$$t = \frac{H}{v_1 \sin\alpha + v_2 \sin\beta} = \frac{H}{v_1 \sin\alpha + \sqrt{v_2^2 - v_1^2 \cos^2\alpha}}.$$

Искомое расстояние

$$s = v_1 t \cos\alpha = \frac{Hv_1 \cos\alpha}{v_1 \sin\alpha + \sqrt{v_2^2 - v_1^2 \cos^2\alpha}},$$

$$s \approx 104 \text{ м.}$$

На самом же деле «пикирование» — это равномерное прямолинейное движение самолета на цель (рис. 1.14, *б*). При выключенном моторе крылья и хвост поддерживают самолет в движении. В этом случае в этой же системе отсчета уравнения для самолета изменятся:

$$\begin{cases} x_c = v_1 t \cos\alpha, \\ y_c = H - v_1 t \sin\alpha. \end{cases}$$

Угол вылета снаряда определяется теми же соотношениями, а время до столкновения уже определяется квадратным уравнением:

$$gt^2 - 2t(v_1 \sin\alpha + v_2 \sin\beta) + 2H = 0,$$

$$t = \frac{1}{g}(v_1 \sin\alpha + v_2 \sin\beta) \pm \sqrt{(v_1 \sin\alpha + v_2 \sin\beta)^2 - 2gH},$$

$$t \approx 15{,}4 \text{ с.}$$

Расстояние до попадания $s_1 \approx 1153$ м.

Ответ: $s = Hv_1 \cos\alpha / (v_1 \sin\alpha + \sqrt{v_2^2 - v_1^2 \cos^2\alpha})$, $s \approx 103{,}5$ м, $s_1 \approx 1153$ м.

1.18. Рассмотрим движение лодок относительно друг друга, Будем считать, что скорость реки одинакова по всей ширине, тогда относительно друг друга лодки будут двигаться так же, как и в стоячей воде.

Необходимо подчеркнуть: когда рассматривается относительное движение, например движение лодки *B* относительно лодки *A*, мы мысленно останавливаем одно из тел, в данной задаче лодку *A*, и все соотношения рассматриваем так, как будто эта лодка покоится, а лодка *B* движется, но с относительной скоростью; перемещение в этом случае также относительно.

Сделайте чертеж. Он представлен на рисунке 1.15. Из треугольника скоростей получим значение для угла β — угла между

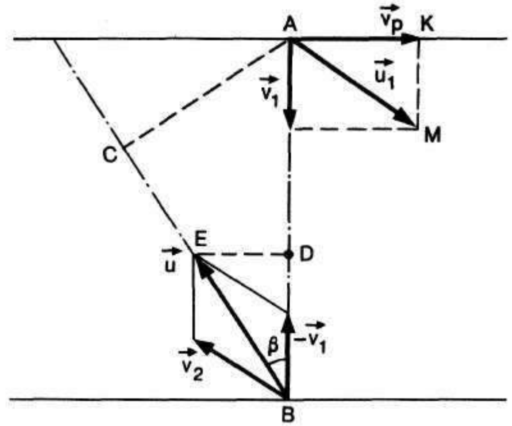


Рис. 1.15

направлением движения лодки B относительно лодки A (треугольник BED на рис. 1.15):

$$\cos\beta=\frac{BD}{BE}=\frac{v_1+v_2\sin\alpha}{u}, \text{ где } u=|\vec{v}_{2-1}|.$$

$$u=\sqrt{(v_2\cos\alpha)^2+(v_1+v_2\sin\alpha)^2}=\sqrt{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\sin\alpha}.$$

Наименьшее расстояние — это расстояние AC. Время движения лодок определим из соотношения для равномерного движения по пути BC со скоростью u:

$$t=\frac{l\cos\beta}{u}=\frac{l(v_1+v_2\sin\alpha)}{u^2}.$$

Первая лодка относительно земли движется со скоростью

$$\vec{u}_1=\vec{v}_1+\vec{v}_{\text{р}},$$

или из треугольника скоростей AMK (по теореме Пифагора)

$$u_1=\sqrt{v_1^2+v_{\text{р}}^2}.$$

Расстояние, пройденное первой лодкой,

$$s=u_1t,$$

$$s=\frac{l(v_1+v_2\sin\alpha)\sqrt{v_1^2+v_{\text{р}}^2}}{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\sin\alpha}.$$

Ответ: $s=\dfrac{l(v_1+v_2\sin\alpha)\sqrt{v_1^2+v_{\text{р}}^2}}{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\sin\alpha}$, $s\approx135$ м.

1.19. В направлении, перпендикулярном берегам, лодка движется сначала равноускоренно, затем равномерно и, наконец, равнозамедленно (т. е. на третьем участке пути ускорение направлено против выбранного положительного направления осей координат). Можно записать:

$$h=\frac{at_1^2}{2}+vt_2+vt_1-\frac{at_1^2}{2},$$

где $v=at_1$ — скорость при равномерном движении. Получим:

$$h=a(t_2+t_1)t_1. \qquad (1)$$

Вдоль берега лодка движется со скоростью реки $v_{\text{р}}$; запишем:

$$l=v_{\text{р}}(2t_1+t_2). \qquad (2)$$

Исключая t_2 из (1) и (2), получим уравнение

$$t_1^2-\frac{l}{v_{\text{р}}}t_1+\frac{h}{a}=0,$$

решение которого

$$t_1=\frac{l}{2v_{\text{р}}}\left(1-\sqrt{1-4\frac{v_{\text{р}}^2h}{al^2}}\right). \qquad (3)$$

В решении для времени t_1 взят знак «минус», так как в противном случае время t_2 получится отрицательным. Подставляя t_1 в (2), находим:

$$t_2=\frac{l}{v_{\text{р}}}\sqrt{1-4\frac{v_{\text{р}}^2h}{al^2}}. \qquad (4)$$

В этой задаче мы определяли равноускоренное и равнозамедленное движение относительно возрастания и уменьшения скорости лодки. Можно было бы выбрать оси координат вдоль реки и перпендикулярно, т. е. выбрать определенное положительное направление и рассматривать проекции скорости и ускорения на это направление. Найдем уравнение траектории, т. е. зависимость $y=y(x)$, причем координата x — это движение лодки относительно берега по течению реки, другими словами, это изменение координат некоторой точки «реки» — движение равномерное. Координата y определяет движение лодки относительно воды.

При $t<t_1$

$$\begin{cases} y=at^2/2,\\ x=v_{\text{р}}t.\end{cases}$$

Исключая время, находим $y=\dfrac{a}{2v_{\text{р}}}x^2$. От начала движения до момента времени t_1 лодка движется по параболе (кривая AC на рис. 1.16.).

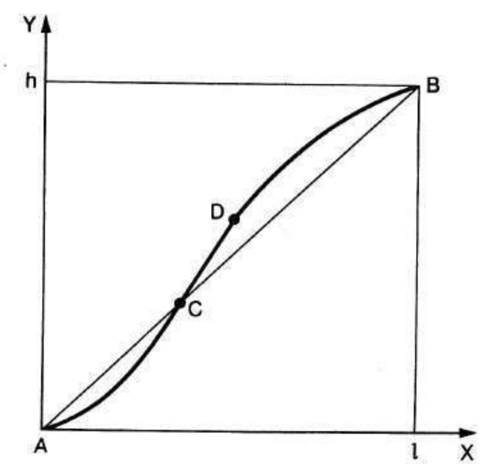


Рис. 1.16

При $t_1<t<t_1+t_2$

$$\begin{cases} y=\frac{at_1^2}{2}+at_1(t-t_1)=at_1t-\frac{at_1^2}{2}, \\ x=v_pt, \end{cases}$$

откуда

$$y=at_1\frac{x}{v_p}-\frac{at_1^2}{2}.$$

На этом участке CD лодка движется по прямой линии.

При $t_1+t_2<t<2t_1+t_2$

$$\begin{cases} y=\frac{at_1^2}{2}+a_1t_1t_2+at_1[t-(t_1+t_2)]-\frac{a[t-(t_1+t_2)]^2}{2}, \\ x=v_pt. \end{cases}$$

Исключая время, получим:

$$y=\frac{a(2t_1+t_2)}{v_p}x-\frac{a}{2v_p^2}x^2-a\left(t_1^2+t_1t_2+\frac{t_2^2}{2}\right).$$

На этом участке кривая DB — парабола, вершина которой находится в точке B.

Ответ: $t_1=\frac{l}{2v_p}\left(1-\sqrt{1-4\frac{v_p^2h}{al^2}}\right)$, $t_1=4$ с;

$$t_2=\frac{l}{v_p}\sqrt{1-4\frac{v_p^2h}{al^2}},\ t_2=32\text{ с}.$$

1.20. *I способ.* Выберем систему координат: ось OX — горизонтальная, ось OY — вертикальная, начало координат совпадает с точкой вылета снаряда (рис. 1.17). Запишем уравнения движения снаряда и самолета в этой системе отсчета:

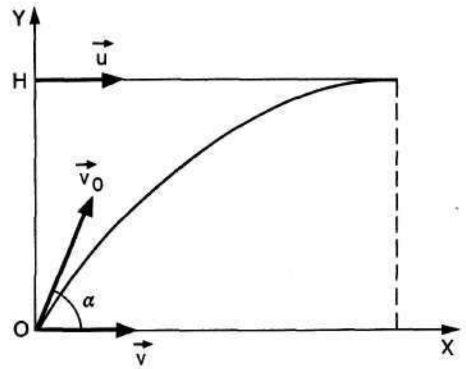


Рис. 1.17

$$x_{сн}=(v_0\cos\alpha+v)t, \quad (1)$$
$$y_{сн}=v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2}; \quad (2)$$
$$x_с=ut, \quad (3)$$
$$y_с=H. \quad (4)$$

В момент столкновения координаты снаряда и самолета одинаковы:

$$ut=(v_0\cos\alpha+v)t.$$

Для вычисления начальной скорости воспользуемся условием задачи: столкновение происходит в верхней точке траектории полета снаряда. В этой точке вертикальная составляющая скорости равна нулю: $v_y=v_0\sin\alpha-gt=0$, откуда $t=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$. Подставим значение времени в уравнение (2), получим $H=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$, откуда $v_0=\frac{\sqrt{2gH}}{\sin\alpha}$. Окончательно имеем: $u=\sqrt{2gH}\,\mathrm{tg}\,\alpha+v$, $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sqrt{2gH}}{u-v}$, $\mathrm{tg}\,\alpha=\sqrt{3}$, $\alpha=60°$.

II способ. Для того чтобы снаряд попал в самолет, необходимо, чтобы $u=v+v_0\cos\alpha$, где v_0 — начальная скорость снаряда относительно танка. Так как снаряд попал в самолет в высшей точке своей траектории, то

$$2gH=v_0^2\sin^2\alpha.$$

Исключая v_0 из этих двух уравнений, найдем:

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sqrt{2gH}}{u-v}.$$

Ответ: $\alpha=\mathrm{arctg}\,[\sqrt{2gH}/(u-v)]$, $\alpha=60°$.

1.21. Для решения задачи воспользуемся следующей формулировкой второго закона Ньютона: изменение импульса системы тел равно импульсу силы, действующей на эту систему. Силой в данном случае является сила давления жидкости. Сила давления определяется как гидростатическое давление жидкости $p=\rho gH$, умноженное на площадь отверстия:

$$F=\rho gHS.$$

Запишем:

$$\rho gHS\Delta t=m_0v_0. \quad (1)$$

Масса воды, вытекающей из отверстия, $m_0=\rho Sv_0\Delta t$. Подставим это выражение в (1), получим:

$$\rho g H S \Delta t = \rho S v_0 \Delta t v_0.$$

Тогда скорость струи определится по формуле

$$v_0 = \sqrt{gH}. \qquad (2)$$

Высоту максимального подъема жидкости определим из соотношения для движения тела в поле сил тяжести Земли: $h = \dfrac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$.

Подставив значение для v_0 из формулы (2), получим:

$$h = \frac{gH \sin^2 \alpha}{2g},$$

откуда $H = \dfrac{2h}{\sin^2 \alpha}$.

Ответ: $H = 2h/\sin^2 \alpha$, $H = 0{,}4$ м.

1.22. На рисунке 1.18 показаны силы, действующие на поршни. В жидкости между поршнями, связанными нитью, возникает дополнительное давление p, при этом $pS_1 = F_1$ — сила, действующая на верхний поршень, а $F_3 = pS_2$ — сила, действующая на нижний поршень. $F_{a1} = p_0 S_1$ — сила атмосферного давления на верхний поршень; $F_{a2} = p_0 S_2$ — сила атмосферного давления на нижний поршень; $F_2 = \rho g l S_2$ — сила гидростатического давления. Считаем нить нерастяжимой и с пренебрежимо малой массой, поэтому силы реакции на верхний и нижний поршни одинаковы: $T_1 = T_2 = T$. Запишем условия равновесия для верхнего поршня:

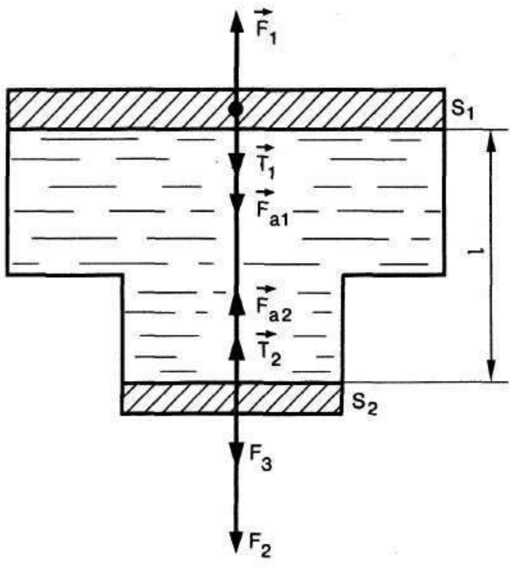


Рис. 1.18

$$p_0 S_1 + T - pS_1 = 0,$$

для нижнего поршня:

$$T + p_0 S_2 - pS_2 - \rho g l S_2 = 0.$$

Исключая давление p из этих уравнений, получим:

$$T = \rho g l \frac{S_1 S_2}{S_1 - S_2}.$$

Ответ: $T = \rho g l \dfrac{S_1 S_2}{S_1 - S_2}$, $T \approx 5{,}45$ Н.

1.23. Силы действующие на жидкость, показаны на рисунке 1.19. В таком сосуде сила давления жидкости на дно сосуда

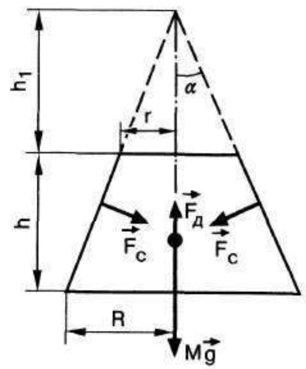


Рис. 1.19

больше силы тяжести жидкости. Сила тяжести уравновешивается разностью силы реакции опоры (дна) $F_д = \rho g h \pi R^2$ и вертикальной составляющей силы реакции стенок $F_с \sin \alpha$. Сила реакции стенок равна силе давления жидкости на боковую поверхность. Запишем условие равновесия жидкости:

$$\vec{F}_д + M\vec{g} + \vec{F}_с = 0.$$

Проекция сил на вертикальную ось — ось OY:

$$Mg + F_с \sin \alpha - \rho g h \pi R^2 = 0.$$

Масса жидкости $m = \rho V$, где ρ — плотность жидкости, V — ее объем. Воспользуемся формулой для объема конуса $V_к = \frac{1}{3} SH$, где S — площадь основания, H — высота. Объем жидкости — это объем усеченного конуса:

$$V = \frac{1}{3}[\pi R^2 (h + h_1) - \pi r^2 h_1].$$

Так как $r = R - h\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $h_1 = r\,\mathrm{ctg}\,\alpha$,

то $V = \frac{\pi h}{3}(3R^2 - 3Rh\,\mathrm{tg}\,\alpha + h^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha)$.

Окончательно находим:

$$F_c = \frac{\pi\rho g h^2}{3\cos\alpha}(3R - h\,\mathrm{tg}\,\alpha).$$

Проверим размерность:

$$[F_c] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}^2}{\text{м}^3\cdot\text{с}^2}\cdot\text{м} = \text{Н}.$$

Ответ: $F_c = \frac{\pi\rho g h^2}{3\cos\alpha}(3R - h\,\mathrm{tg}\,\alpha)$, $F_c = 29{,}2$Н.

1.24. Силы, действующие на грузы, показаны на рисунке 1.20: m_1g и m_2g — силы тяжести, F_{A1} и F_{A2} — силы Архимеда, T_1 и T_2 — реакции нити. Считаем нить нерастяжимой и невесомой. Так как $m_1g = \rho_1V_1g$, $m_2g = \rho_2V_2g$, $F_{A1} = \rho V_1 g$, $F_{A2} = \rho V_2 g$, $T_1 = T_2 = T$, то условие равновесия верхнего груза:

$$\rho V_1 g - T - \rho_1 V_1 g = 0. \qquad (1)$$

Условие равновесия нижнего груза:

$$\rho V_2 g + T - \rho_2 V_2 g = 0. \qquad (2)$$

Исключая силу реакции нитей из уравнений, получим:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_2 - \rho}{\rho - \rho_1}. \qquad (3)$$

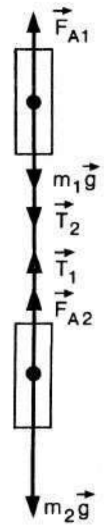


Рис. 1.20

Суммарная сила тяжести грузов $mg = (\rho_1V_1 + \rho_2V_2)\,g$. Учитывая выражение (3), получим:

$$mg = V_1 g\rho\,(\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 - \rho).$$

Тогда объем $V_1 = \frac{m\,(\rho_2 - \rho)}{\rho\,(\rho_2 - \rho_1)}$. Сила реакции нити из уравнения (1) равна

$$T = gV_1(\rho - \rho_1).$$

Определим отношение

$$\frac{T}{mg} = \frac{(\rho - \rho_1)(\rho_2 - \rho)}{\rho\,(\rho_2 - \rho_1)}.$$

Подставляя численные значения, получим:

$$\frac{V_1}{V_2} = 2, \quad \frac{T}{mg} \approx 0{,}267.$$

Ответ: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_2 - \rho}{\rho - \rho_1}$, $\frac{V_1}{V_2} = 2$;

$$\frac{T}{mg} = \frac{(\rho - \rho_1)(\rho_2 - \rho)}{\rho\,(\rho_2 - \rho_1)}, \quad \frac{T}{mg} \approx 0{,}267.$$

1.25. Рассмотрим силы, действующие на каждый груз в отдельности (рис. 1.21). Запишем для каждого груза уравнение второго закона Ньютона в проекции на направление ускорения для каждого груза.

В этой и в последующих задачах пренебрегаем массой блока, массой нити, растяжением нити, трением в оси блока. Тогда сила натяжения нити T' и сила реакции нити T по обе стороны блока одинаковы: $T_1 = T_2 = T$.

$$\begin{cases} m_2g - T = m_2a, \\ -m_1g + T = m_1a. \end{cases}$$

$\vec{T}'_1 = -\vec{T}$ (по третьему закону Ньютона). Полученную систему уравнений решаем относительно ускорения и натяжения нити:

$$a = g\,\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1},$$

$$T = \frac{m_1m_2g}{m_1 + m_2}.$$

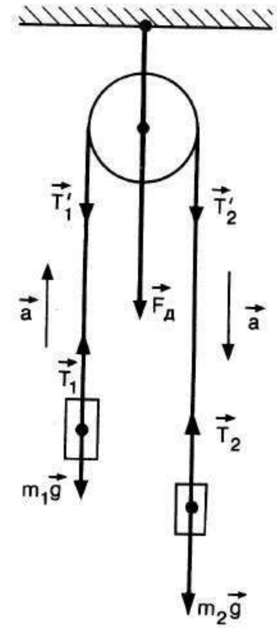


Рис. 1.21

Сила давления на ось блока, как видно из рисунка, равна $2T$.

$$F_д = \frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2}.$$

Ответ: $a = g\,\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$, $a \approx 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$;

$$T = \frac{m_1m_2g}{m_1 + m_2}, \quad T = 1{,}2\ \text{Н};$$

$$F_д = \frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2}, \quad F_д = 2{,}4\ \text{Н}.$$

1.26. Определим силы, действующие на грузы при равновесии: $M\vec{g}$, $M_1\vec{g}$ — силы тяжести, $\vec{T}$, $\vec{T}_1$ — силы реакции нитей. Силы показаны на рисунке 1.22. Сила $\vec{T}_1$ и сила $\vec{T}'_1$ равны и противоположно направлены по третьему закону Ньютона: $\vec{T}_1 = -\vec{T}'_1$. При равновесии сумма сил, действующих на каждое тело, равна нулю.

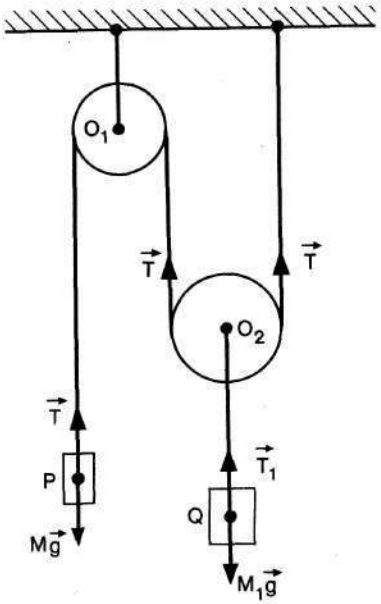


Рис. 1.22

$$\begin{cases} Mg-T=0, \\ 2T-T_1=0, \\ M_1g-T_1=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Из системы (1) видно, что масса груза Q $M_1=2M$. Рассмотрим движение грузов после того, как положили перегрузок. Силы в этом случае показаны на рисунке 1.23. Уравнения второго закона Ньютона для каждого груза запишем в проекции на направление движения:

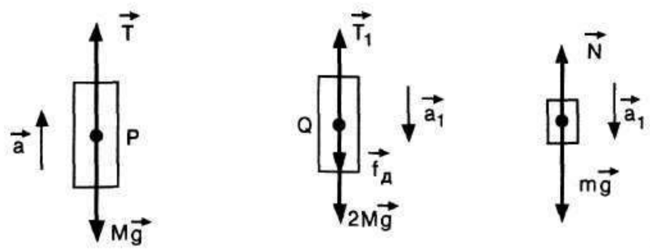


Рис. 1.23

$$\begin{cases} T-Mg=Ma, \\ 2Mg+f_д-2T=2M\,\frac{a}{2}, \\ mg-N=m\,\frac{a}{2}. \end{cases} \qquad (2)$$

$\vec{f}_д=-\vec{N}$ по третьему закону Ньютона.
Определяем давление перегрузка на груз:

$$f_д=\frac{6Mgm}{6M+m}.$$

При составлении уравнений системы (2) учитывается, что реакция нити $T_1=2T$; это было показано при рассмотрении равновесия системы. Второе уравнение системы (1) остается таким же, так как мы пренебрегаем массой блоков. Ускорение груза Q и перегрузка в 2 раза меньше ускорения груза P, так как при перемещении груза P на высоту h груз Q с перегрузком опустится только на высоту $h/2$ за это же время — этот груз висит на двух «отрезках» нити.

Ответ: $f_д=\frac{6Mgm}{6M+m}$, $f_д\approx 1{,}8$ Н.

1.27. По второму закону Ньютона ускорение определяется отношением силы к массе тела, на которое эта сила действует:

$$a=\frac{F}{m},\ a=\frac{At}{m},\ a=2{,}5\ t.$$

Ускорение линейно изменяется со временем, скорость определяется интегрированием:

$$v=\int_0^t a(t)\,dt=\int_0^t \frac{At}{m}\,dt=\frac{At^2}{2m},$$

т. е. площадью под графиком зависимости ускорения от времени, в данном случае площадью треугольника ABO (рис. 1.24):

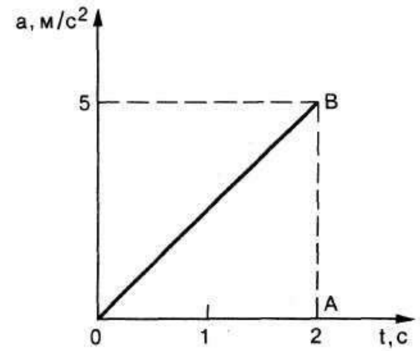


Рис. 1.24

$$v_1 = 5 \text{ м/с.}$$
$$a_1 = 5 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a = \frac{At}{m}$, $a = 5$ м/с^2;

$$v = \frac{At^2}{2m}, \ v = 5 \text{ м/с.}$$

1.28. Рассмотрим силы, действующие на тело: $m\vec{g}$ — сила тяжести, $\vec{N}$ — сила реакции опоры, $\vec{F}_{тр}$ — сила трения. Тело будет находиться в покое до тех пор, пока составляющая силы $F = F\cos\alpha$ не будет превышать максимальную силу трения покоя (рис. 1.25):

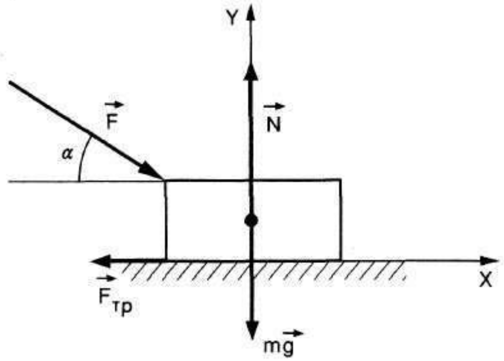


Рис. 1.25

$$F\cos\alpha \leqslant \mu N,$$
$$N = mg + F\sin\alpha,$$
$$\mu = \frac{F\cos\alpha}{mg + F\sin\alpha}.$$

Ответ: $\mu = \frac{F\cos\alpha}{mg + F\sin\alpha}$, $\mu \approx 0{,}36$.

1.29. Рассмотрим силы, действующие на сани (рис. 1.26):

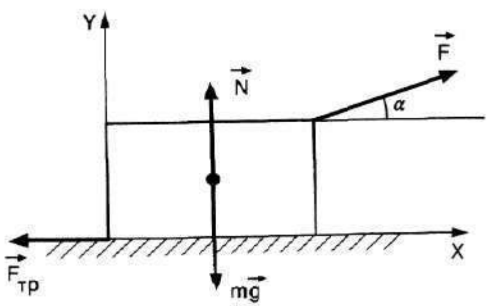


Рис. 1.26

$\vec{N}$ — сила реакции опоры, $\vec{F}_{тр}$ — сила трения, $m\vec{g}$ — сила тяжести. Запишем уравнение второго закона Ньютона для саней:

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}.$$

Проектируя силы на ось OX, получим:

$$F\cos\alpha - F_{тр} = ma, \qquad (1)$$

на ось OY:

$$F\sin\alpha + N - mg = 0. \qquad (2)$$

Сила трения при движении $F_{тр} = \mu N$.

Из уравнения (2) получим $N = mg - F\sin\alpha$. Из уравнения (1) с учетом силы трения найдем ускорение:

$$a = \frac{1}{m}[F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha)].$$

Работа, совершаемая человеком, $A = Fs\cos\alpha$, так как сила, действующая на сани, постоянна. Путь, пройденный санями за время t, определится из формулы $s = \frac{at^2}{2}$. Окончательно имеем:

$$A = F\cos\alpha\,\frac{t^2}{2}\,\frac{F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha)}{m}.$$

Ответ: $a = \frac{F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha)}{m}$, $a \approx 0{,}7\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$;

$$A = \frac{F\cos\alpha\,[F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha)]\,t^2}{2m}, \ A \approx 44 \text{ кДж.}$$

1.30 Рассмотрим движение грузов и стержня в отдельности. До наступления разрыва стержня они двигаются с одинаковым ускорением. Силы, действующие на тела и стержень, показаны на рисунке 1.27: $M\vec{g}$ и $m\vec{g}$ — силы тяжести груза и стержня,

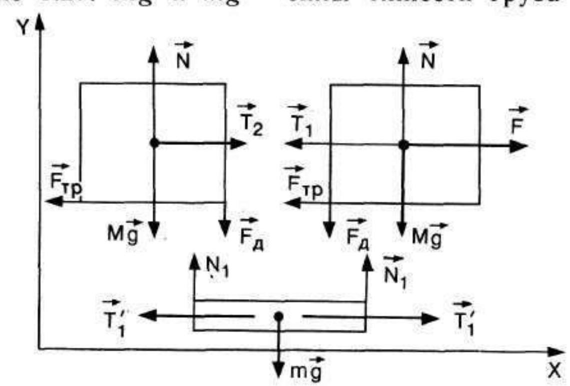


Рис. 1.27

$F_{тр} = \mu N$ — сила трения, N — сила реакции опоры, $\vec{F}_д$ — сила давления со стороны стержня на груз, $\vec{N}_1$ — сила реакции груза на стержень. По третьему закону Ньютона

$$\vec{F}_д = -\vec{N}_1,\ \vec{T}_1 = -\vec{T}'_1,\ \vec{T}_2 = -\vec{T}'_2.$$

Запишем уравнения второго закона Ньютона для грузов и для стержня в проекции на оси OX, и OY:

$$\begin{cases} F - T_1 - F_{тр} = Ma, \\ T_2 - F_{тр} = Ma, \\ T_1 - T_2 = ma; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} N - Mg - N_1 = 0, \\ -mg + 2N_1 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Силы реакции со стороны грузов будем считать одинаковыми из-за симметрии: грузы одинаковые, стержень однородный. Из второй системы определяем силу реакции опоры N и, зная ее, находим силу трения $F_{тр} = \frac{\mu g}{2}(2M + m)$. Будем считать максимальной силой, разрывающей стержень, силу T_1. Исключая из уравнений первой системы ускорение и T_2, находим:

$$F = \frac{2M + m}{2(M + m)}[2T_{max} + \mu g(2M + m)].$$

Ответ: $F = \frac{2M + m}{2(M + m)}[2T_{max} + \mu g(2M + m)]$.

1.31. Представим шнур в виде двух кусков слева и справа от указанного сечения и рассмотрим силы, действующие на эти куски (рис. 1.28). Составим уравнения второго закона Ньютона:

Рис. 1.28

$$\begin{cases} F - T - \mu \frac{m}{l} bg = \frac{m}{l} ab, \\ T - \mu \frac{m}{l}(l - b) g = \frac{m}{l}(l - b) a. \end{cases}$$

Из системы уравнений определим натяжение:

$$T = F\frac{l - b}{l}.$$

Ответ: $T = F\left(1 - \frac{b}{l}\right)$.

1.32. *I способ*. Задачу можно решить, используя законы Ньютона и кинематические соотношения (рис. 1.29):

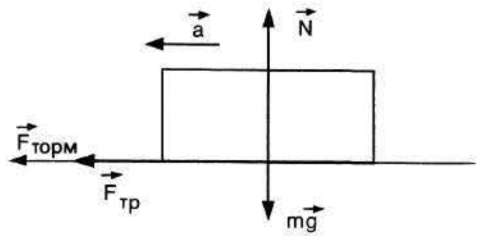


Рис. 1.29

$$F_{торм} + \mu mg = ma,$$

$$a = \frac{v_0^2 - v^2}{2s},$$

$$F_{торм} = m\left(\frac{v_0^2 - v^2}{2s} - \mu g\right).$$

Проверим размерность:

$$[F] = кг\left(\frac{м^2}{с^2 \cdot м} - \frac{м}{с^2}\right) = Н.$$

II способ. Однако значительно проще решить задачу, используя закон сохранения энергии для незамкнутой системы,— изменение кинетической энергии тела равно работе внешних сил, т. е. работе сил трения и торможения:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = (\mu mg + F_{торм})\,s,$$

откуда

$$F_{торм} = m\left(\frac{v_0^2 - v^2}{2s} - \mu g\right).$$

Ответ: $F_{торм} = m\left(\frac{v_0^2 - v^2}{2s} - \mu g\right)$, $F_{торм} = 10$ Н.

1.33. Рассмотрим силы, действующие на клин (рис. 1.30, *а*): $\vec{f}_д$ — сила давления тела на клин, $\vec{F}_{тр}$ — сила трения между клином и телом, $F_{тр} = \mu N$, $\vec{F}_{тр1}$ — сила трения между клином и плоскостью. Силы, действующие на тело, показаны на рисунке 1.30, *б*: $\vec{N}$ — сила реакции опоры, $m\vec{g}$ — сила тяжести, $\vec{F}_{тр2}$ — сила трения между телом и клином, $F_{тр2} = \mu N$. По третьему зако-

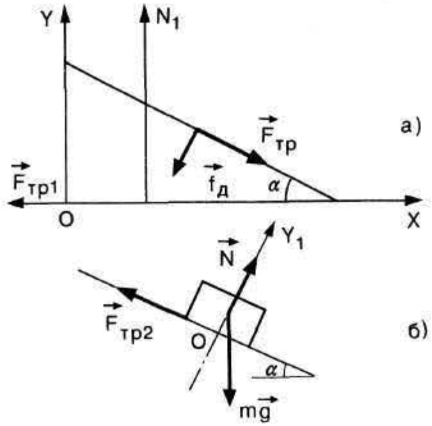


Рис. 1.30

ну Ньютона $\vec{F}_{тр2}=-\vec{F}_{тр}$, $\vec{N}=-\vec{f}_{д}$. Силу реакции опоры определим из условия равновесия тела. Запишем проекции сил на ось OY_1: $N=mg\cos\alpha$. Клин находится в покое, следовательно, векторная сумма сил, действующих на клин, равна нулю: $\vec{N}_1+\vec{F}_{тр}+\vec{F}_{тр1}+\vec{f}_{д}=0$.

Проекция сил на ось OX:

$$-f_{д}\sin\alpha+F_{тр}\cos\alpha-F_{тр1}=0,$$

или

$$-mg\cos\alpha\sin\alpha+\mu mg\cos^2\alpha-\mu_0 N_1=0. \qquad (1)$$

Проекция сил на ось OY:

$$N_1-f_{д}\cos\alpha-F_{тр}\sin\alpha=0,$$

или

$$N_1-mg\cos^2\alpha-\mu mg\cos\alpha\sin\alpha=0. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) получим $N_1=mg\cos\alpha(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)$, подставим в (1):

$$-mg\cos\alpha\sin\alpha+\mu mg\cos^2\alpha-\mu_0 mg\cos\alpha(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)=0,$$

откуда

$$\mu_0=\frac{\mu\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}=\frac{\mu-\operatorname{tg}\alpha}{1+\mu\operatorname{tg}\alpha}.$$

Ответ: $\mu_0=\dfrac{\mu-\operatorname{tg}\alpha}{1+\mu\operatorname{tg}\alpha}$.

1.34. Силы, действующие на грузы, изображены на рисунке 1.31, *а*. Для того чтобы груз массой m не двигался вниз, необхо-

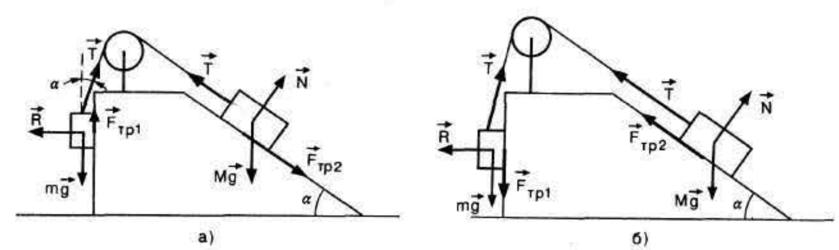


Рис. 1.31

димо выполнение соотношения

$$mg\leqslant T\cos\alpha+F_{тр1}, \qquad (1)$$

где $F_{тр1}=\mu R$ — максимальная сила трения покоя груза массой m. Сила реакции $R=T\sin\alpha$. Подставляя R и $F_{тр1}$ в (1), получим:

$$mg\leqslant T\cos\alpha+\mu T\sin\alpha. \qquad (2)$$

Для того чтобы груз массой M не поднимался по наклонной плоскости, должно выполняться неравенство

$$T\leqslant Mg\sin\alpha+F_{тр2}, \qquad (3)$$

где $F_{тр2}=\mu N=\mu Mg\cos\alpha$ — максимальная сила трения покоя для груза массой M. Подставим выражение для $F_{тр2}$ в (3):

$$T\leqslant Mg\sin\alpha+\mu Mg\cos\alpha. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (2), получим $\frac{m}{M}\leqslant\frac{1+\mu^2}{2}\sin 2\alpha+\mu$. Аналогичным образом рассмотрим условие: груз массой m не двигается вверх, а груз массой M не опускается по плоскости; учтем при этом, что силы трения не изменяются, изменяется лишь их направление (рис. 1.31, *б*):

$$T\cos\alpha\leqslant mg+\mu T\sin\alpha, \qquad (5)$$
$$Mg\sin\alpha\leqslant T+\mu Mg\cos\alpha. \qquad (6)$$

Подставляя (5) в (6), получим $\frac{m}{M}\geqslant\frac{1+\mu^2}{2}\sin 2\alpha-\mu$.

Ответ: $\frac{1+\mu^2}{2}\sin 2\alpha-\mu\leqslant\frac{m}{M}\leqslant\mu+\frac{1+\mu^2}{2}\sin 2\alpha$, $0{,}32\leqslant\frac{m}{M}\leqslant 0{,}72$.

1.35. *I способ.* Силы, действующие на каждый из грузов и на клин, показаны на рисунке 1.32: $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, $M\vec{g}$ — силы тяжести, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ — силы реакции клина, $\vec{R}$ — сила реакции плоскости. Клин двигается под действием суммы горизонтальных составляющих сил $\vec{N}_1'$ и $\vec{N}_2'$. По третьему закону Ньютона $\vec{N}_1'=-\vec{N}_1$ и

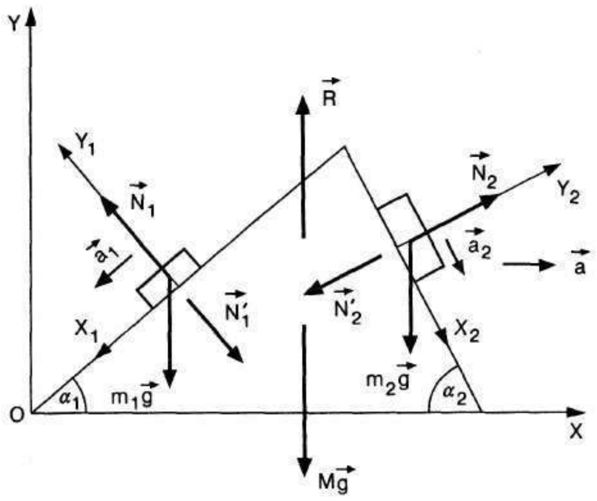


Рис. 1.32

$\vec{N}_2' = -\vec{N}_2$. Уравнение второго закона Ньютона для клина в проекции на ось OX (горизонтальное направление):

$$N_1 \sin \alpha_1 - N_2 \sin \alpha_2 = Ma, \quad (1)$$

где a — ускорение клина. Для вертикальной (OY) и горизонтальной (OX) составляющих ускорения груза массой m_1 запишем уравнение второго закона Ньютона:

$$m_1 g - N_1 \cos \alpha_1 = m_1 a_{в1}, \quad (2)$$

$$N_1 \sin \alpha_1 = m_1 a_{г1}. \quad (3)$$

Аналогичные уравнения запишем для второго груза массой m_2:

$$m_2 g - N_2 \cos \alpha_2 = m_2 a_{в2}, \quad (4)$$

$$N_2 \sin \alpha_2 = m_2 a_{г2}. \quad (5)$$

Ускорения грузов a_1 и a_2, а также их составляющие показаны на рисунке 1.33. Из чертежа видно, что

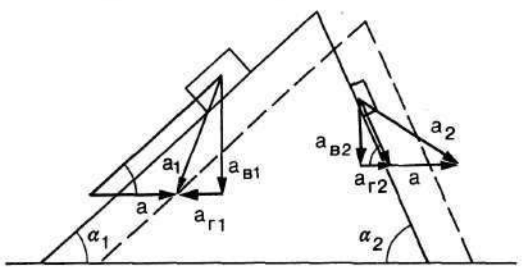


Рис. 1.33

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{a_{в1}}{a + a_{г1}}, \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{a_{в2}}{a_{г2} - a}. \quad (7)$$

Выражения (6) и (7) означают, что при движении системы грузы массами m_1 и m_2 остаются на плоскости клина, т. е. это чисто геометрические условия.

Выразим $a_{в1}$ из (6): $a_{в1} = a \operatorname{tg} \alpha_1 + a_{г1} \operatorname{tg} \alpha_1$ — и подставим в (2):

$$N_1 \cos \alpha_1 = m_1 (g - a \operatorname{tg} \alpha_1 - a_{г1} \operatorname{tg} \alpha_1). \quad (8)$$

Полученное из (7) значение $a_{в2}$ подставим в (4):

$$N_2 \cos \alpha_2 = m_2 (g - a_{г2} \operatorname{tg} \alpha_2 + a \operatorname{tg} \alpha_2). \quad (9)$$

Выражение для $a_{г1}$ из (3) подставим в (8), получим:

$$N_1 = \frac{m_1 (g - a \operatorname{tg} \alpha_1)}{\cos \alpha_1 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1)} = m_1 \cos \alpha_1 (g - a \operatorname{tg} \alpha_1). \quad (10)$$

Из (5) получим $a_{г2}$ и подставим в (9), тогда

$$N_2 = \frac{m_2 (g + a \operatorname{tg} \alpha_2)}{\cos \alpha_2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2)} = m_2 \cos \alpha_2 (g + a \operatorname{tg} \alpha_2). \quad (11)$$

Подставим соотношения (10) и (11) в уравнение (1), найдем:

$$a = \frac{g (m_1 \sin 2\alpha_1 - m_2 \sin 2\alpha_2)}{2 (m_1 \sin^2 \alpha_1 + m_2 \sin^2 \alpha_2 + M)}. \quad (12)$$

По условию задачи $\alpha_1 = \alpha$ и $\alpha_2 = 90° - \alpha$; получим окончательно выражение для ускорения клина

$$a = \frac{g}{2} \frac{(m_1 - m_2) \sin 2\alpha}{m_1 \sin^2 \alpha + m_2 \cos^2 \alpha + M}.$$

II способ. Уравнение второго закона Ньютона для движения клина в проекции на ось OX такое же, как и в первом случае:

$$N_1 \sin \alpha_1 - N_2 \sin \alpha_2 = Ma. \quad (1)$$

Для нахождения сил рассмотрим движение тел массами m_1 и m_2 относительно земли. Второй закон Ньютона выполняется только для инерциальных систем отсчета, за которую в данном случае можно принять землю. Клин же неинерциальная система. Ускорение каждого из тел есть векторная сумма ускорения тела относительно клина $\vec{a}_1$ или $\vec{a}_2$ и ускорения самого клина относительно земли $\vec{a}$: $\vec{a}_1' = \vec{a}_1 + \vec{a}$; $\vec{a}_2' = \vec{a}_2 + \vec{a}$. Тогда для тела массой m_1 $\vec{N}_1 + m_1\vec{g} = m_1 (\vec{a} + \vec{a}_1)$, или в проекциях (см. рис. 1.32)

на ось OX_1: $m_1 g \sin \alpha = m_1 (a_1 - a \cos \alpha)$,

на ось OY_1: $N_1 - m_1 g \cos \alpha = -m_1 a \sin \alpha$. (2a)

Для тела массой m_2 запишем: $\vec{N}_2+m_2\vec{g}=m_2(\vec{a}+\vec{a}_2)$, или в проекциях
на ось OX_2: $m_2 g\cos\alpha=m_2(a_2+a\sin\alpha)$,
на ось OY_2: $N_2-m_2 g\sin\alpha=m_2 a\cos\alpha$. (3а)

Для нахождения N_1 и N_2 достаточно воспользоваться только уравнениями (2а) и (3а):

$$N_1=m_1(g\cos\alpha-a\sin\alpha),\quad N_2=m_2(a\cos\alpha+g\sin\alpha).$$

Подставим в (1)

$$m_1 g\cos\alpha\sin\alpha-m_1 a\sin^2\alpha-m_2 a\cos^2\alpha-m_2 g\sin\alpha\cos\alpha=Ma,$$

после преобразований получим выражение для ускорения:

$$a=\frac{g}{2}\,\frac{\sin 2\alpha\,(m_1-m_2)}{M+m_1\sin^2\alpha+m_2\cos^2\alpha}.$$

Ответ: $a=\frac{g}{2}\,\frac{\sin 2\alpha\,(m_1-m_2)}{M+m_1\sin^2\alpha+m_2\cos^2\alpha}$, $a\approx 0{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

1.36. На танк действуют две силы: $m\vec{g}$ — сила тяжести и $\vec{N}_1$ — сила реакции опоры (рис. 1.34). Сила реакции опоры связана

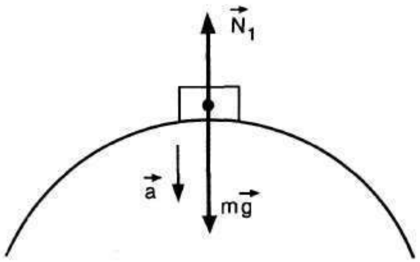


Рис. 1.34

с силой давления

$$\vec{N}_1=-\vec{F}_д$$

по третьему закону Ньютона. Эти силы создают центростремительное ускорение; запишем второй закон Ньютона в проекции на направление ускорения:

$$mg-N_1=m\frac{v^2}{R}.$$

Тогда $v^2=\frac{R\,(mg-N_1)}{m}$.

Чтобы мост выдержал нагрузку, необходимо, чтобы $N_1\leqslant N$. Получим $v=\sqrt{\frac{R\,(mg-N)}{m}}$.

Проверим размерность:

$$[v]=\left(\frac{\text{м}\cdot\text{Н}}{\text{кг}}\right)^{1/2}=\left(\frac{\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}\right)^{1/2}=\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $v=\sqrt{\frac{R\,(mg-N)}{m}}$, $v\approx 6{,}3\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

1.37. Рассмотрим силы, действующие на летчика в верхней точке траектории (рис. 1.35): $m\vec{g}$ — сила тяжести. Эта сила со-

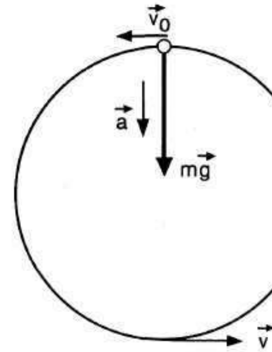


Рис. 1.35

здает центростремительное ускорение $a=\frac{v_0^2}{R}$. Будем считать, что скорость самолета постоянна, тогда $mg=m\frac{v_0^2}{R}$, $v_0=\sqrt{gR}$. Если скорость самолета изменяется, то скорость в нижней точке определим из закона сохранения механической энергии в поле тяжести Земли:

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_0^2}{2}+mg2R,$$
$$v^2=gR+4gR,$$
$$v=\sqrt{5gR}.$$

Ответ: $v_0=\sqrt{gR}$, $v_0\approx 62{,}6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$;

$v=\sqrt{5gR}$, $v\approx 140\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

1.38. Предположим, что нить обрывается в момент прохождения шариком точки A (рис. 1.36). Рассмотрим силы, действующие на шарик в этой точке: $\vec{T}$ — реакция нити, $m\vec{g}$ — сила тяжести. Проекции этих сил на направление нити создают центростремительное ускорение v^2/l:

$$T-mg\cos\alpha=m\frac{v^2}{l}.$$

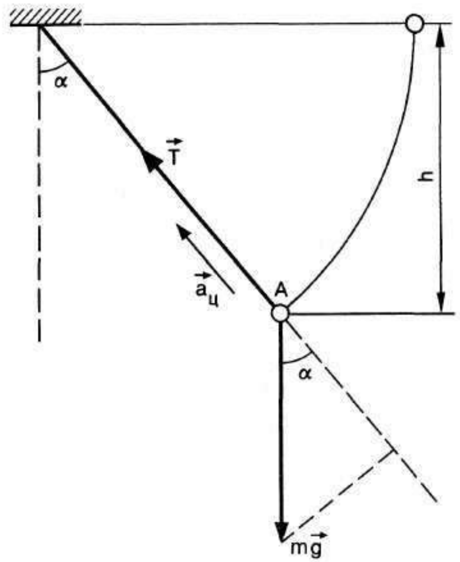


Рис. 1.36

Скорость v определим из закона сохранения энергии:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}, \text{ где } h = l\cos\alpha.$$

Окончательно

$$T - mg\cos\alpha = 2mg\cos\alpha, \quad T = 3mg\cos\alpha.$$

При $T = T_{max}$ определим

$$\cos\alpha = \frac{T_{max}}{3mg}, \quad \cos\alpha = 0{,}5.$$

Ответ: $\alpha = \arccos\frac{T}{3mg}$.

$\alpha = 60°$.

1.39. В этой задаче не сказано, как движется тело: с постоянной по модулю скоростью или с переменной. Поэтому рассмотрим два случая. Направления сил и ускорений показаны на рисунке 1.37.

I. $v = \text{const}$.

Запишем уравнения закона Ньютона для верхней и нижней точек траектории:

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}, \text{ где } a = \frac{v^2}{R}.$$

Спроектируем силы на направление ускорения в каждом случае:

$$T_1 + mg = m\frac{v^2}{R},$$

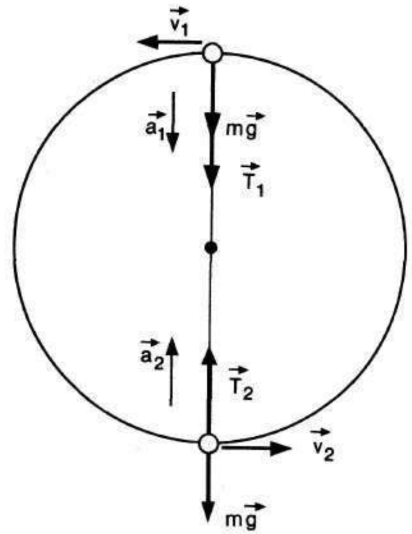


Рис. 1.37

$$T_2 - mg = m\frac{v^2}{R}.$$

Определим разность $T_2 - T_1 = 2mg$,

$$\Delta T_I = 2mg.$$

II. $v \neq \text{const}$.

Уравнения движения в этом случае:

$$T_1 + mg = \frac{mv_1^2}{R},$$

$$T_2 - mg = \frac{mv_2^2}{R}.$$

$$T_2 - T_1 = 2mg + \frac{mv_2^2}{R} - \frac{mv_1^2}{R}.$$

Запишем закон сохранения энергии при движении в поле тяжести Земли, приняв за нулевой уровень потенциальной энергии нижнюю точку траектории:

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + 2mgR, \text{ откуда } v_2^2 - v_1^2 = 4gR.$$

Окончательно получаем:

$$\Delta T = 2mg + \frac{m}{R}(v_2^2 - v_1^2),$$

$$\Delta T = 6mg.$$

Ответ: $\Delta T_I = 2mg$, $\Delta T_I = 4$ Н;
$\Delta T_{II} = 6mg$, $\Delta T_{II} = 12$ Н.

1.40. Воспользуемся решением задачи 1.39.

I. $v=\text{const}$.

$\Delta T=2m_{\text{I}}g$, откуда $m_{\text{I}}=\dfrac{\Delta T}{2g}$.

II. $V\neq\text{const}$.

$\Delta T=6m_{\text{II}}g$.

Ответ: $m_{\text{I}}=\dfrac{\Delta T}{2g}$, $m_{\text{I}}=0{,}6$ кг;

$m_{\text{II}}=\dfrac{\Delta T}{6g}$, $m_{\text{II}}=0{,}2$ кг.

1.41. Для решения задачи воспользуемся законом сохранения механической энергии для системы шарики — Земля. Эта система замкнута, внутренние силы — силы упругости и силы тяжести. За нулевой уровень потенциальной энергии примем уровень O_1O_2 (рис. 1.38). Запишем:

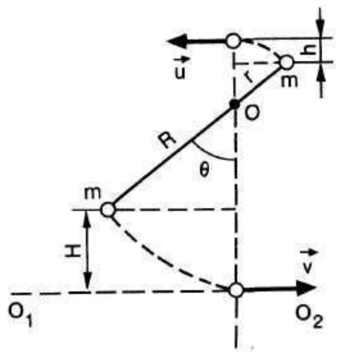


Рис. 1.38

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{mu^2}{2}=mg\,(H-h), \qquad (1)$$

где v и u — скорости грузов при прохождении положения равновесия. Линейные и угловые скорости связаны между собой следующим образом:

$$v=\omega R,\ u=\omega r.$$

Из геометрических соображений получим $H=R\,(1-\cos\Theta)$, $h=r\,(1-\cos\Theta)$.

Из соотношения (1) получим:

$$\frac{1}{2}(R^2+r^2)\,\omega^2=g\,(R-r)\,(1-\cos\Theta),$$

откуда находим ω: $\omega=\sqrt{2g\,\dfrac{R-r}{R^2+r^2}\,(1-\cos\Theta)}$.

Проверим размерность:

$$[\omega]=\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\frac{\text{м}}{\text{м}^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\text{с}}.$$

Ответ: $\omega=\sqrt{2g\,\dfrac{R-r}{R^2+r^2}\,(1-\cos\Theta)}$,

$\omega=4{,}4\,\dfrac{1}{\text{с}}$.

1.42. В положении A полное ускорение направлено горизонтально (рис. 1.39). Нам известно, что при неравномерном движении по окружности полное ускорение есть векторная сумма двух ускорений: центростремительного, направленного по радиусу к центру, и тангенциального, направленного по касательной к окружности. Из треугольника ABC получим связь центростремительного и тангенциального ускорений:

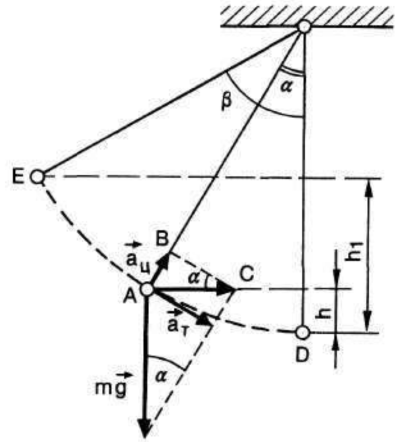


Рис. 1.39

$$\frac{a_{\text{ц}}}{a_\tau}=\text{tg}\,\alpha,\ a_{\text{ц}}=\frac{v_1^2}{l}.$$

Тангенциальное ускорение получим из уравнения второго закона Ньютона в проекции на направление касательной: $mg\sin\alpha=$ $=ma_\tau$. Таким образом,

$$v_1^2=g\sin\alpha\cdot l\,\text{tg}\,\alpha. \qquad (1)$$

Запишем закон сохранения механической энергии в поле тяжести Земли, выбрав за нулевой уровень потенциальной энергии горизонталь, проходящую через точку D (начальное положение шарика):

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+mgl\,(1-\cos\alpha). \qquad (2)$$

В момент максимального отклонения от положения равновесия скорость шарика равна нулю, следовательно,

$$\frac{mv^2}{2}=mgl\,(1-\cos\beta). \qquad (3)$$

Приравняем правые части (2) и (3) и подставим вместо v_1^2 выражение (1):

$$2gl\,(1-\cos\beta)=g\sin\alpha\cdot l\,\mathrm{tg}\,\alpha+2gl\,(1-\cos\alpha),$$

откуда $\cos\beta=\cos\alpha-\sin\alpha\,\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{2}$,

$$\cos\beta=\frac{5\sqrt{3}}{12}.$$

Ответ: $\beta=\arccos\left(\cos\alpha-\frac{\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2}\right)$, $\beta\approx44°$.

1.43. На груз массой m действуют три силы: T_1, T_2 — реакции стержней и mg — сила тяжести (рис. 1.40). Эти силы создают

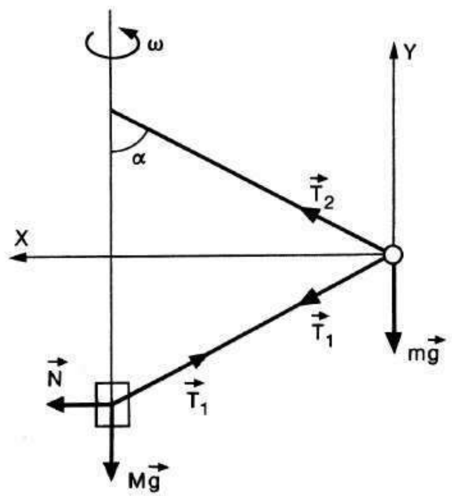


Рис. 1.40

центростремительное ускорение. Выберем оси OX и OY, как показано на рисунке 1.40. Запишем уравнение второго закона Ньютона для этого груза:

$$m\vec{g}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=m\vec{a}.$$

Проекции этого уравнения на

ось OX: $(T_1+T_2)\sin\alpha=m\omega^2 a\sin\alpha$, (1)

ось OY: $-mg-T_1\cos\alpha+T_2\cos\alpha=0$. (2)

Из (1) и (2) находим:

$$T_1=\frac{1}{2}m\omega^2 a-\frac{1}{2}mg\,\frac{1}{\cos\alpha}. \qquad (3)$$

Груз массой M находится в равновесии, когда выполняется неравенство

$$Mg-f_{\text{тр}}\leqslant T_1\cos\alpha\leqslant Mg+f_{\text{тр}}. \qquad (4)$$

Здесь $f_{\text{тр}}=\mu T_1\sin\alpha$ — максимальная сила трения покоя. Сила трения может быть направлена как вверх, так и вниз. Подставляя в (4) выражение для $f_{\text{тр}}$ и (3), получим:

$$\sqrt{\frac{2M+m\,(1+\mathrm{tg}\,\alpha)}{ma\,(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}\,g}\leqslant\omega\leqslant\sqrt{\frac{2M+m\,(1-\mathrm{tg}\,\alpha)}{ma\,(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)}\,g}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{[2M+m\,(1+\mathrm{tg}\,\alpha)]\,g}{ma\,(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}}\leqslant\omega\leqslant\sqrt{\frac{[2M+m\,(1-\mathrm{tg}\,\alpha)]\,g}{ma\,(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)}}$,

$$16{,}4\,\frac{1}{\text{с}}\leqslant\omega\leqslant20\,\frac{1}{\text{с}}.$$

1.44. Рассмотрим силы, действующие в некотором сечении стержня. Выберем сечение на расстоянии r от оси вращения. В этом сечении сила T растягивает оставшуюся часть стержня (рис. 1.41). Эта сила сообщает центростремительное ускорение

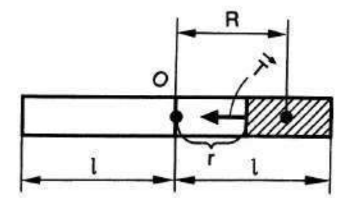


Рис. 1.41

части стержня длиной $(l-r)$. По второму закону Ньютона $T=m\omega^2 R$, где $m=\rho S\,(l-r)$ — масса этой части стержня, S — площадь поперечного сечения стержня, $R=r+\frac{l-r}{2}=\frac{l+r}{2}$ — расстояние от оси вращения до центра тяжести стержня длиной $(l-r)$, ω — угловая скорость движения стержня. Таким образом,

$$T=\frac{1}{2}\rho S\omega^2\,(l^2-r^2). \qquad (1)$$

Из соотношения (1) для силы, растягивающей стержень, видно, что наибольшего значения эта сила достигает при приближении r к нулю, т. е. вблизи оси вращения. При $r=0$

$$T_{\max}=\frac{1}{2}\rho S\omega^2 l^2. \qquad (2)$$

С другой стороны, разрыв происходит тогда, когда максимальная сила растяжения равна

$$T_{\max}=\sigma S, \qquad (3)$$

где σ — прочность на разрыв или предел прочности. Сравнивая (3) и (2), получим:

$$\frac{1}{2}\rho S\omega^2 l^2=\sigma S,$$

откуда $\omega^2=2\sigma/(\rho l^2)$.

Линейную скорость концов стержня определим из соотношения, связывающего угловую и линейную скорости при движении по окружности: $v=\omega l$. Окончательно $v=\sqrt{2\sigma/\rho}$.

Проверим размерность:

$$[v]=\left(\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^2\cdot\text{кг}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $v=\sqrt{\frac{2\sigma}{\rho}}$, $v\approx 250$м/с.

1.45. Рассмотрим малый элемент длины кольца Δl (рис. 1.42).

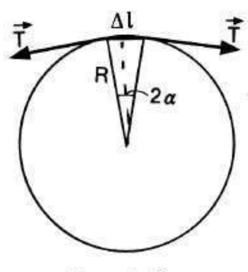


Рис. 1.42

Этот элемент растягивается силами $\vec{T}$. Сумма проекций этих сил на направление по радиусу к центру создает центростремительное ускорение. Угол 2α мал, следовательно, можно считать $\sin\alpha\approx\alpha$. Тогда $\Delta l=R2\alpha$. Центростремительное ускорение равно $a_{ц}=\omega^2 R$.

Уравнение второго закона Ньютона: $2T\alpha=\Delta m\omega^2 R$, где $\Delta m=\frac{m}{2\pi R}\Delta l=\frac{m}{2\pi}2\alpha$ — масса элемента Δl. Тогда $\omega^2=2\pi\frac{T}{mR}$.

Разрыв кольца произойдет, когда с увеличением углового ускорения сила натяжения достигает максимального значения,

т. е. $T_{\max}=\frac{\pi d^2}{4}\sigma$, где d — диаметр проволоки.

Масса кольца $m=2\pi R\frac{\pi d^2}{4}\rho$.

Следовательно, $\omega^2=2\pi\frac{\pi d^2\sigma 4\rho}{4R2\pi R\pi d^2}$,

откуда

$$\omega^2=\frac{\sigma}{\rho R^2}, \text{ или } \omega=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}.$$

Ответ: $\omega=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$, $\omega=500\,\frac{1}{\text{с}}$.

1.46. До зацепления связанные грузы двигаются в поле тяжести Земли и перед зацеплением приобретают скорость v_0, которую надо определить. Рассмотрим движение грузов после того, как нить зацепилась за гвоздь. Это — движение каждого груза по окружности радиусом $R={}^{l}/_{2}$. Максимальное натяжение нить испытывает в момент времени, предшествующий столкновению. Рассматривая грузы как материальные точки (т. е. пренебрегая их размерами), будем считать, что перед столкновением нити вертикальны. Мы пренебрегаем углом между нитями. Сила натяжения нити равна силе реакции нити, но противоположно направлена (третий закон Ньютона). Мы рассмотрим движение только одного груза из-за симметрии расположения грузов и их движения. Силы, действующие на груз, показаны на рисунке 1.43. Запишем уравнение второго закона Ньютона в проекции на вертикальную ось:

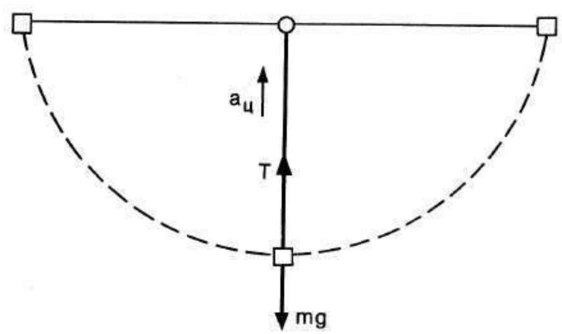


Рис. 1.43

$$T-mg=\frac{mv^2}{l/2}, \qquad (1)$$

где v — скорость груза перед столкновением.

По закону сохранения энергии

$$mv^2/2 = mv_0^2/2 + mgl/2. \qquad (2)$$

В начальный момент времени у каждого груза кинетическая энергия $mv_0^2/2$ и потенциальная $mgl/2$, если принять за нулевой уровень потенциальной энергии уровень, где грузы столкнутся. Из уравнений (1) и (2) определим силу натяжения нити:

$$T = 3mg + 2mv_0^2/l.$$

Нить не разорвется, если $T \leqslant T_{max}$. Таким образом,

$$3mg + 2mv_0^2/l \leqslant T_{max}.$$

Отсюда находим искомую скорость: $v_0 \leqslant \sqrt{\frac{l}{2m}(T_{max} - 3mg)}$.

Ответ: $v_0 \leqslant \sqrt{\frac{l}{2m}(T_{max} - 3mg)}$, $v_0 \leqslant 10{,}5$ м/с.

1.47. Силы, действующие на катушку, показаны на рисунке 1.44. По второму закону Ньютона $\vec{F} + \vec{F}_{тр} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$.

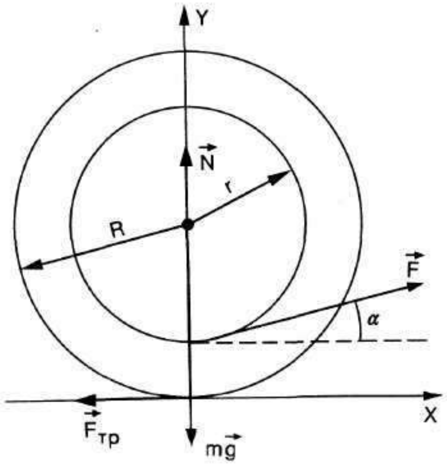


Рис. 1.44

Проекции сил на ось OX:

$$F\cos\alpha - F_{тр} = ma. \qquad (1)$$

Проекции сил на ось OY:

$$F\sin\alpha + N - mg = 0. \qquad (2)$$

Силу трения определим как максимальную силу трения покоя:

$$F_{тр} = \mu N. \qquad (3)$$

Выразим силу реакции опоры из (2), силу трения из (3) и подставим все в (1):

$$F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) = ma. \qquad (4)$$

Так как катушка не вращается, сумма моментов всех сил относительно оси катушки равна нулю:

$$Fr - F_{тр}R = 0,$$

или

$$Fr - \mu(mg - F\sin\alpha)R = 0. \qquad (5)$$

Из соотношения (5) получим значение силы F, а из уравнения (4) искомое ускорение: $F = \mu mgR/(r + \mu R\sin\alpha)$,

$$a = \mu g\frac{R\cos\alpha - r}{r + \mu R\sin\alpha}.$$

Ответ: $a = \mu g\frac{R\cos\alpha - r}{r + \mu R\sin\alpha}$, $a \approx 1{,}2$ м/с^2.

1.48. Движение гоночного автомобиля представим как движение материальной точки по окружности в горизонтальной плоскости вокруг точки O (рис. 1.45). На автомобиль действуют

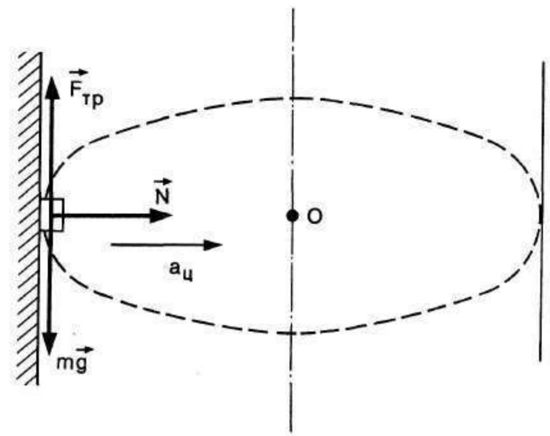


Рис. 1.45

силы: $\vec{N}$ — реакция опоры, $m\vec{g}$ — сила тяжести, $\vec{F}_{тр}$ — сила трения. Из рисунка 1.45 видно, что $F_{тр} = mg$, а сила реакции опоры создает центростремительное ускорение. Второй закон Ньютона для этого движения запишется следующим образом:

$$N = \frac{mv^2}{R}, \quad \mu N = mg, \quad \text{или} \quad \frac{mg}{\mu} = \frac{mv^2}{R},$$

откуда $\mu = \frac{gR}{v^2}$.

Ответ: $\mu=\frac{gR}{v^2}$, $\mu\approx 0{,}2$.

1.49. Силы, действующие на мотоциклиста, показаны на рисунке 1.46. Запишем второй закон Ньютона для мотоциклиста:

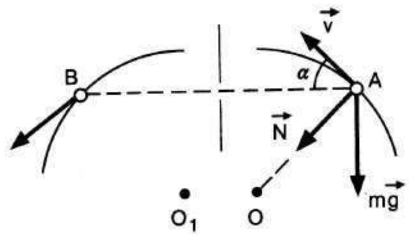


Рис. 1.46

$\vec{N}+m\vec{g}=m\vec{a}_ц$, где $a_ц$ — центростремительное ускорение, направленное по радиусу к центру O. В проекции на это направление запишем, учитывая, что в момент отрыва тела от поверхности сила реакции опоры равна нулю:

$$mg\cos\alpha=mv^2/R.$$

Дальнейшее движение мотоциклиста до «приземления» происходит по параболе. Второй цилиндр должен быть расположен таким образом, чтобы в точке приземления скорость мотоциклиста была направлена по касательной к окружности. Так как оси цилиндров расположены на одной высоте, точка приземления должна находиться на одной горизонтали с точкой отрыва. В полете мотоциклист будет находиться в течение времени

$$t=\frac{2v\sin\alpha}{g};\ \sin\alpha=\sqrt{1-\frac{v^4}{(gR)^2}}.$$

Расстояние между точками приземления и отрыва

$$s=v\cos\alpha\cdot t,\ s=\frac{2v^4}{g^2R}\sqrt{1-\frac{v^4}{(gR)^2}},$$

а расстояние между осями цилиндров OO_1

$$l=2R\sin\alpha-s=2R\left[1-\left(\frac{v^2}{gR}\right)^2\right]^{3/2}.$$

Ответ: $l=2R\left[1-\left(\frac{v^2}{gR}\right)^2\right]^{3/2}$, $l\approx 1{,}2$ м.

1.50. Примем потенциальную энергию в точке бросания равной нулю. По закону сохранения механической энергии

$$E_0=mgH,$$

откуда $H=\frac{E_0}{mg}$.

Используем закон сохранения энергии для интересующей нас точки:

$$E_0=2mgH_1,\ \text{так как}\ E_к=E_п=mgH_1,\ H_1=\frac{E_0}{2mg}.$$

Ответ: $H=\frac{E_0}{mg}$, $H=20{,}4$ м; $H_1=\frac{E_0}{2mg}$, $H_1=10{,}2$ м.

1.51. При упругом ударе о стенку скорость шайбы до удара по модулю равна скорости шайбы после удара. Можно считать, что весь путь шайба проходит как бы без удара: $L=l+s$. Из рисунка 1.47 видно, что из-за симметрии $AB=BC=s$. Для нахож-

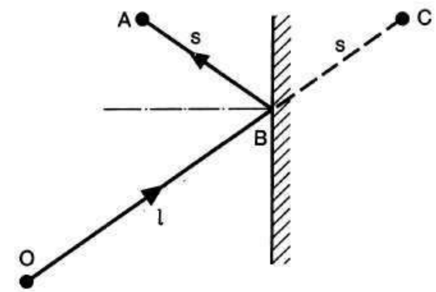


Рис. 1.47

дения пути используем два условия: 1) изменение кинетической энергии системы равно работе сил трения, взятой с обратным знаком; 2) сила трения на горизонтальном пути равна μmg.

$$\frac{mv_0^2}{2}=\mu mgL,\ \frac{v_0^2}{2}=\mu g(l+s),\ s=\frac{v_0^2}{2\mu g}-l.$$

Ответ: $s=\frac{v_0^2}{2\mu g}-l$, $s\approx 2{,}76$ м.

1.52. Для определения скорости бруска воспользуемся законом сохранения импульса:

$$mv_0=mv_1+Mv. \quad (1)$$

Скорость пули после взаимодействия определим из условия потери кинетической энергии:

$$\frac{1}{2}\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2},$$

откуда $v_1=\frac{v_0}{\sqrt{2}}$.

Подставив v_1 в (1), получим: $\dfrac{mv_0-m\dfrac{v_0}{\sqrt{2}}}{M}=v$, $v=\frac{mv_0}{M}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ответ: $v=\frac{mv_0}{M}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $v\approx 0{,}175$ м/с.

1.53. Рассмотрим закон сохранения импульса для неупругого удара:

$$m\vec{v}_0=(m+M)\vec{v}. \qquad (1)$$

Скорость шарика v_0 определим, зная кинетическую энергию:

$$v_0=\sqrt{\frac{2E_0}{m}}\,. \qquad (2)$$

Запишем закон сохранения энергии для системы тел брусок — шарик в поле тяжести Земли после удара:

$$\frac{(m+M)v^2}{2}=(m+M)gh.$$

Из треугольника OAB (рис. 1.48) $\cos\alpha=\frac{l-h}{l}$,

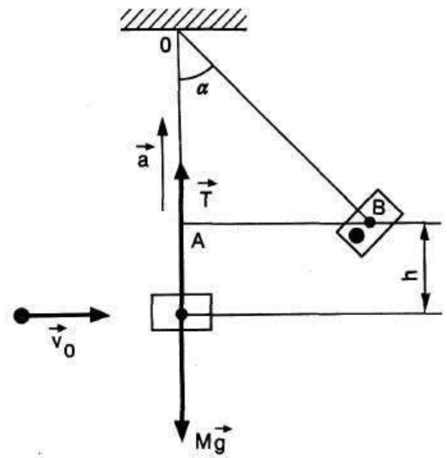


Рис. 1.48

$$\cos\alpha=1-\frac{v^2}{2gl}=1-\left(\frac{m}{m+M}\right)^2\frac{2E_0}{2gml},$$

$$\cos\alpha=1-\frac{mE_0}{(m+M)^2gl},\quad \cos\alpha=\frac{1}{9},\quad \alpha=\arccos\frac{1}{9}.$$

Для определения натяжения нити запишем уравнение второго закона Ньютона. В положении равновесия на систему шарик — брусок действуют две силы: сила тяжести и сила реакции нити. Эти силы создают центростремительное ускорение, направленное вдоль нити к точке подвеса (по радиусу к центру). Следовательно, имеем:

$$T-m_1g=\frac{m_1v^2}{l},\ \text{где}\ m_1=m+M,$$

откуда $T=m_1\left(g+\frac{v^2}{l}\right)=(m+M)\left(g+\frac{2E_0m}{(m+M)^2l}\right)$. Сила натяжения нити равна по модулю силе реакции нити:

$$T'=(m+M)\left(g+\frac{2E_0m}{(m+M)^2\,l}\right).$$

Ответ: $\alpha=\arccos\frac{1}{9}$, $\alpha\approx 84°$; $T'=(m+M)\left(g+\frac{2Em}{(m+M)^2\,l}\right)$.

1.54. Запишем в векторной форме закон сохранения импульса для этого взаимодействия:

$$m_1\vec{v}_1=m_1\frac{\vec{v}_1}{2}+m_2\vec{v}_2.$$

Из треугольника векторов импульсов (рис. 1.49) находим:

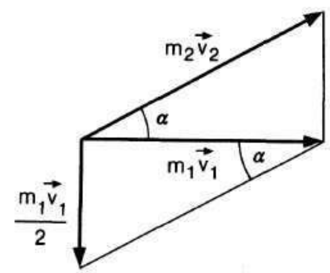


Рис. 1.49

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{m_1v_1}{2m_1v_1}=\frac{1}{2},\quad \alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\alpha\approx 26{,}6°$.

1.55. При упругом ударе о стенку скорость изменяет направление, а по модулю не изменяется. Изменение энергии происходит за счет работы сил трения. Работа силы трения на горизонтальном участке одинакова при движении до стенки и после удара: $A_1=-2\mu mgb$. Работа сил трения на наклонной плоскости при движении вниз

$$A_2=-\mu mg\cos\alpha\,\frac{H}{\sin\alpha}=-\mu mgH\operatorname{ctg}\alpha,$$

при движении вверх $A_3=-\mu mg\cos\alpha\,\frac{h}{\sin\alpha}=-\mu mgh\operatorname{ctg}\alpha$.

Окончательно

$$mgh-mgH=A_1+A_2+A_3,$$

$$mg(h-H)=-mg\mu(2b+H\operatorname{ctg}\alpha+h\operatorname{ctg}\alpha),$$

$$h=\frac{-\mu(2b+H\operatorname{ctg}\alpha)+H}{1+\mu\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Ответ: $h=\dfrac{H-\mu(2b+H\operatorname{ctg}\alpha)}{1+\mu\operatorname{ctg}\alpha}$, $h\approx 8{,}3$ см.

1.56. Определим, имеет ли больший осколок после взрыва начальную скорость. Предположим, что скорость этого осколка $\vec{v}_1$ направлена вертикально вниз. Для движения осколка в поле тяжести Земли получим уравнение движения:

$$H=v_1t_0+\frac{gt_0^2}{2},$$

где $H=320$ м, откуда получим

$$v_1=\frac{2H-gt_0^2}{2t_0}. \qquad (1)$$

Подставив числовое значение величин, получим $v_1=60$ м/с. Значение скорости получили положительное, следовательно, в действительности больший осколок падает вниз. Запишем закон сохранения импульса: $3m\vec{v}_0=2m\vec{v}_1+m\vec{v}_2$. Учитывая, что скорость снаряда до взрыва горизонтальна, нарисуем треугольник векторов импульсов (рис. 1.50). Из этого треугольника получим:

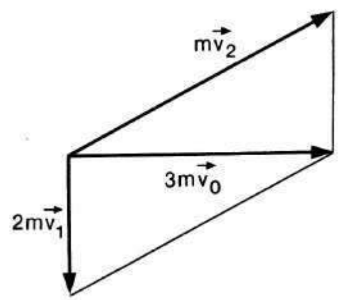


Рис. 1.50

$$(mv_2)_x=3mv_0,\ v_{2x}=3v_0;$$
$$(mv_2)_y=2mv_1,\ v_{2y}=2v_1.$$

Рассмотрим движение легкого осколка. Выберем систему координат: начало координат на Земле в точке падения большого осколка (рис. 1.51), ось OX — горизонтально, ось OY — вертикально.

$$x=v_{2x}t, \qquad (2)$$
$$y=H+v_{2y}t-\frac{gt^2}{2}. \qquad (3)$$

Приравняем правую часть уравнения (3) к нулю (в момент

падения координата $y=0$) и определим время движения: $H+2v_1t-\dfrac{gt^2}{2}=0$, или $gt^2-4v_1t-2H=0$,

$$t=\frac{2v_1}{g}+\sqrt{\frac{4v_1^2}{g^2}+\frac{2H}{g}},$$

с учетом (1) получаем $t=\dfrac{2H}{gt_0}-t_0+\sqrt{\left(\dfrac{2H}{gt_0}\right)^2+t_0^2-\dfrac{2H}{g}}$. Подста-

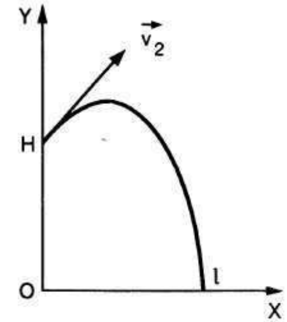


Рис. 1.51

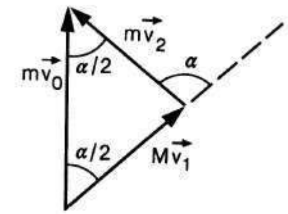


Рис. 1.52

вив полученное выражение для времени в уравнение (2), получим искомое расстояние:

$$l=3v_0t=3v_0\left(\frac{2H}{gt_0}-t_0+\sqrt{\left(\frac{2H}{gt_0}\right)^2+t_0^2-\frac{2H}{g}}\right).$$

Ответ: $l=3v_0\left(\dfrac{2H}{gt_0}-t_0+\sqrt{\left(\dfrac{2H}{gt_0}\right)^2+t_0^2-\dfrac{2H}{g}}\right)$, $l\approx 12$ км.

1.57. По закону сохранения импульса

$$m\vec{v}_0=m\vec{v}_2+M\vec{v}_1.$$

Рассмотрим треугольник импульсов. Из рисунка 1.52 видно, что $Mv_1=mv_2$ (1) и $2Mv_1\cos\alpha/2=mv_0$ (2).
Закон сохранения энергии дает:

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{Mv_1^2}{2}+\frac{mv_2^2}{2}. \qquad (3)$$

Решая совместно эти уравнения, найдем v_1 и v_2:

$$mv_0^2=M\left(\frac{mv_2}{M}\right)^2+mv_2^2,$$

$$v_2^2=\frac{v_0^2}{1+\frac{m}{M}},\quad v_2=\frac{v_0}{\sqrt{1+\frac{m}{M}}},\quad v_1=\frac{mv_0}{M\sqrt{1+\frac{m}{M}}}.$$

Из уравнения (2) найдем значение $\cos\frac{\alpha}{2}$:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{M}+1}\,,\quad \alpha=2\arccos 0{,}625.$$

Ответ: $v_1=\dfrac{\frac{m}{M}v_0}{\sqrt{1+\frac{m}{M}}}$, $v_1\approx 2{,}25$ м/с;

$v_2=\dfrac{v_0}{\sqrt{1+\frac{m}{M}}}$, $v_2\approx 4$ м/с;

$\alpha=2\arccos\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{m}{M}}$,

$\alpha\approx 102{,}6°$.

1.58. Рассмотрим законы сохранения импульса и энергии для абсолютно упругого удара:

$$m\vec{v}_0=m\vec{v}+M\vec{u},$$
$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv^2}{2}+\frac{Mu^2}{2}.$$

Рассмотрим проекции импульсов на направления вдоль ребра куба и на перпендикулярное направление. Куб может двигаться только вдоль оси OX (рис. 1.53).

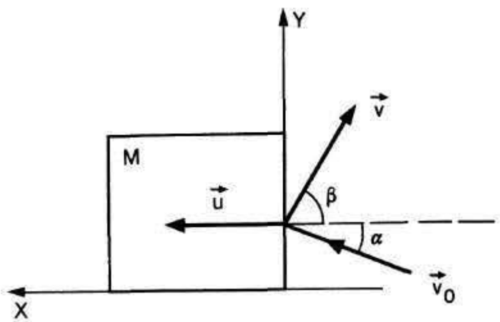


Рис. 1.53

Запишем:

$$\begin{cases} v_0\cos\alpha=au-v\cos\beta, & (1)\\ v_0\sin\alpha=v\sin\beta, & (2)\\ v_0^2=v^2+au^2, & (3)\end{cases}$$

где $a=\frac{M}{m}$.

Из (1) и (2) получим:

$$\cos\beta=\frac{au-v_0\cos\alpha}{v},\quad \sin\beta=\frac{v_0}{v}\sin\alpha. \qquad (4)$$

Возведем обе части получившихся выражений в квадрат, сложим и приравняем единице (основное тригонометрическое тождество):

$$1=\frac{1}{v^2}\left((au)^2-2auv_0\cos\alpha+v_0^2\cos^2\alpha+v_0^2\sin^2\alpha\right),$$

после упрощения имеем $au-2v_0\cos\alpha+u=0$, откуда

$$u=\frac{2v_0\cos\alpha}{1+a}. \qquad (5)$$

Подставим полученное выражение в (3), используя (5), получим:

$$v^2=v_0^2\left(1-\frac{a\,4\cos^2\alpha}{(1+a)^2}\right). \qquad (6)$$

Из (2) и (6) получим выражение для $\sin\beta$:

$$\sin\beta=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\frac{4a\cos^2\alpha}{(1+a)^2}}}.$$

Ответ: $u=\dfrac{2v_0\cos\alpha}{1+a}$, $u=3{,}5$ м/с, где $a=\dfrac{M}{m}$;

$v=v_0\sqrt{1-\dfrac{4a\cos^2\alpha}{(1+a)^2}}$; $v=7{,}9$ м/с;

$\beta=\arcsin\left(\sin\alpha\Big/\sqrt{1-\dfrac{4a\cos^2\alpha}{(1+a)^2}}\right)$,

$\beta\approx 63{,}5°$.

1.59. Искомое расстояние легко определить, если знать вертикальную и горизонтальную составляющие скорости $v_в$, $v_г$ сразу после удара (рис. 1.54). В верхней точке траектории вертикальная составляющая скорости обращается в нуль, время движения из-за симметрии траектории (в данном случае параболы) равно

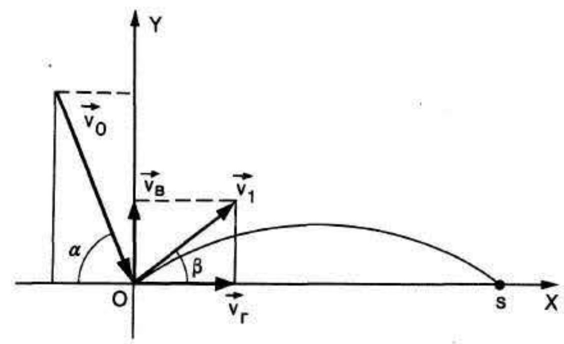


Рис. 1.54

$$t=2\frac{v_{\text{в}}}{g}.$$

Расстояние до следующего удара

$$s=2\frac{v_{\text{в}}}{g}v_{\text{г}} \qquad (1)$$

При ударе о плиту происходит потеря энергии, поэтому для кинетической энергии до и после удара запишем:

$$(1-\eta)\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}. \qquad (2)$$

Из рисунка по теореме Пифагора получим:

$$v_1^2=v_{\text{в}}^2+v_{\text{г}}^2. \qquad (3)$$

При столкновении с плитой на тело действуют только вертикальные силы (сила тяжести и сила реакции плиты); так как $\Delta\vec{p}=\vec{F}\Delta t$, то сохраняется только горизонтальная составляющая импульса:

$$v_0\cos\alpha=v_{\text{г}}. \qquad (4)$$

Объединяя (2), (3) и (4), получим $v_{\text{в}}=v_0\sqrt{\sin^2\alpha-\eta}$. Окончательно $s=2\frac{v_0^2}{g}\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha-\eta}$.

Ответ: $s=2\frac{v_0^2}{g}\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha-\eta}$, $s\approx1{,}96$ м.

1.60. Рассмотрим силы, действующие на каждое тело в отдельности. На рисунке 1.55 показаны: $\vec{N}_1$ — сила реакции — действие доски на брусок, $m\vec{g}$ — сила тяжести бруска, $\vec{F}_{\text{тр}1}$ — сила трения между бруском и доской; $\vec{N}_2$ — сила реакции стола на доску, $\vec{f}_{\text{д}}$ — сила давления бруска на доску (по третьему закону Ньютона $\vec{f}_{\text{д}}=-\vec{N}_1$), $\vec{F}_{\text{тр}2}$ — сила трения между доской и поверхностью стола, причем

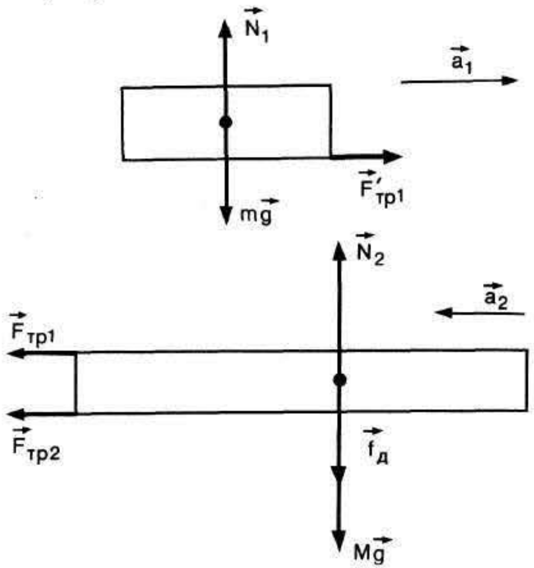


Рис. 1.55

$$\vec{F}_{\text{тр}1}=-\vec{F}'_{\text{тр}1}.$$

В начальный момент времени тела скользят относительно друг друга, поэтому силы трения определяются как $F_{\text{тр}}=\mu N$. Уравнения второго закона Ньютона запишутся следующим образом:

для бруска $\mu_1 mg=ma_1$, (1)

для доски $\mu_1 mg+\mu_2(m+M)g=Ma_2$. (2)

Это движение происходит до тех пор, пока скорости тел относительно стола не окажутся равными (брусок остановится). Уравнения зависимости скоростей тел от времени следующие:

$$v_1=a_1t,$$
$$v_2=v_0-a_2t.$$

В интересующий нас момент $v_2=v_1$. Следовательно, время движения до этого момента определим из соотношения

$$a_1t=v_0-a_2t,$$
$$t=\frac{v_0}{a_2+a_1}.$$

Учитывая (1) и (2), получаем:

$$t=\frac{v_0M}{(\mu_1+\mu_2)(m+M)g}.$$

Брусок за это время пройдет относительно стола путь

$$s_1=\frac{a_1t^2}{2},\quad s_1=\frac{\mu_1v_0^2M^2}{2g(\mu_1+\mu_2)^2(m+M)^2}.$$

Доска переместится относительно стола на расстояние

$$s_2=v_0t-\frac{a_2t^2}{2},\quad s_2=\frac{v_0^2M}{2g}\,\frac{(\mu_2+\mu_1)(m+M)+\mu_1M}{(\mu_1+\mu_2)^2(m+M)^2}.$$

Путь, пройденный бруском относительно доски, $s=s_2-s_1$,

$$s=\frac{v_0^2}{2g}\,\frac{M}{(\mu_1+\mu_2)(m+M)}.$$

Дальнейшее движние тел зависит от соотношения между μ_1 и μ_2. При движении бруска и доски как единого целого их ускорение $a=\mu_2 g$. Это возможно лишь, если $ma<\mu_1 gm$, т. е. $\mu_2<\mu_1$, что соответствует условию задачи. Дальнейшего перемещения тел относительно друг друга не будет.

Ответ: $s=\dfrac{v_0^2}{2g}\dfrac{M}{(\mu_1+\mu_2)(m+M)}$,

$s\approx 1{,}7$ см.

1.61. Удар о клин абсолютно упругий. Запишем закон сохранения кинетической энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{Mu^2}{2}+\frac{mv^2}{2}, \qquad (1)$$

где v_0 — скорость шарика перед ударом, u — скорость клина, v — скорость шарика после удара (рис. 1.56). Так как в горизон-

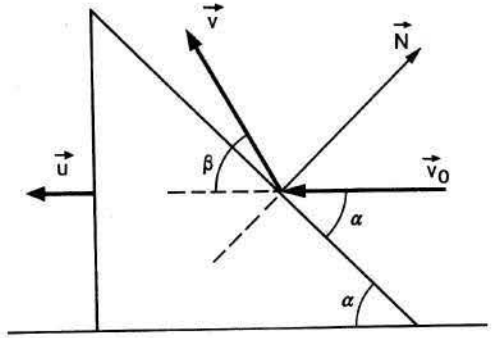


Рис. 1.56

тальном направлении на систему клин — шарик силы не действуют, то горизонтальная составляющая импульса этой системы сохраняется:

$$mv_0=Mu+mv\cos\beta. \qquad (2)$$

Будем считать, что за время удара сила тяжести практически не изменяет импульс шарика. Изменение импульса шарика происходит только под действием силы реакции клина $\vec{N}$, направленной перпендикулярно соприкасающимся поверхностям клина и шарика. Поэтому составляющая импульса, направленная вдоль наклонной поверхности клина, при ударе не изменяется:

$$v_0\cos\alpha=v\cos(\beta-\alpha). \qquad (3)$$

Введем обозначение $n=\dfrac{M}{m}$ и преобразуем уравнения (1) и (2):

$$v_0^2-v^2=u^2n,$$
$$\frac{v_0-nu}{v}=\cos\beta.$$

Из уравнения (3), используя полученные выражения, получим:

$$\sin\beta=\frac{nu}{v}\operatorname{tg}\alpha.$$

Воспользуемся тригонометрическим соотношением $1=\cos^2\beta+\sin^2\beta$. Тогда $1=\left(\dfrac{v_0-nu}{v}\right)^2+\left(\dfrac{nu}{v}\operatorname{tg}\alpha\right)^2$, откуда получим:

$$u=\frac{2v_0\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+n},$$
$$\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha\,\frac{2n\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+n-2n\cos^2\alpha}.$$

Ответ: $\beta=\operatorname{arctg}\left\{\operatorname{tg}\alpha\,\dfrac{2n\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+n-2n\cos^2\alpha}\right\}$, $\beta\approx 60°$, $n=\dfrac{M}{m}$.

1.62. Скорости шарика до и после удара показаны на рисунке 1.57. Изменение импульса шарика происходит только под дей-

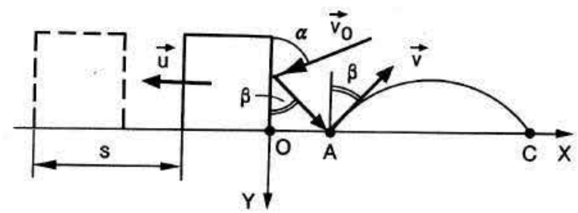


Рис. 1.57

ствием силы реакции куба, поэтому составляющие импульса по оси OY сохраняются (проекция импульса на ось OY до удара равна проекции на эту же ось после удара):

$$v_0\cos\alpha=v\cos\beta. \qquad (1)$$

Импульс всей системы шарик — куб сохраняется, поэтому в проекции на ось OX получим:

$$mv_0\sin\alpha=Mu-mv\sin\beta. \qquad (2)$$

Закон сохранения механической энергии для системы шарик — куб запишем в следующем виде:

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv^2}{2}+\frac{Mu^2}{2}. \qquad (3)$$

Введем обозначение $n=M/m$, тогда выражение (3) можно записать так: $v_0^2-v^2=nu^2$. Запишем v_0 и v в следующем виде:

$$v_0^2=v_0^2\sin^2\alpha+v_0^2\cos^2\alpha,\quad v^2=v^2\sin^2\beta+v^2\cos^2\beta;$$

используя формулу разности квадратов, получим:

$$(v_0\sin\alpha-v\sin\beta)(v_0\sin\alpha+v\sin\beta+v_0^2\cos^2\alpha-v^2\cos^2\beta)=nu^2,$$

или $v_0\sin\alpha-v\sin\beta=u$, откуда, используя (2), получим $u=2v_0\sin\alpha/(n+1)$.

Путь, пройденный кубом, $s = ut$, где время определяется из уравнения движения тела, брошенного под углом к горизонту (вспомните задачи 1.2, 1.3):

$$t = \frac{2v \cos \beta}{g} = \frac{2v_0 \cos \alpha}{g}.$$

Окончательно находим: $s = \dfrac{2v_0 \sin \alpha \, 2\cos \alpha}{(n+1)g}$, или $s = \dfrac{2m}{m+M} \dfrac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$.

Ответ: $s = \dfrac{2m}{m+M} \dfrac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$, $s \approx 3{,}4$ см.

1.63. Импульс между телами *2* и *3* перераспределяется мгновенно, поэтому сразу же после удара скорость этих тел будет одинакова и равна v_1. Закон сохранения импульса дает:

$$Mv_0 = 2Mv_1. \qquad (1)$$

При дальнейшем движении сила трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu mg$ будет ускорять тело *1* до конечной скорости v и замедлять тела *2* и *3* до этой же скорости v. Скорость движения тел как единого целого определяется законом сохранения импульса

$$Mv_0 = (2M + m)\, v. \qquad (2)$$

Пусть за время установления движения тело *1* массой m прошло путь s_2, работа силы трения определится как μmgs_1 или $\mu mgs_1 = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{mM^2v_0^2}{2\,(2M+m)^2}$, откуда $s = \dfrac{M^2v_0^2}{2\,(2M+m)^2 g\mu}$.

Тела *2* и *3* массой M прошли путь s_2, работа силы трения μmgs_2. При этом произошло уменьшение кинетической энергии этих тел. Запишем:

$$\mu mgs_2 = \frac{2Mv_1^2}{2} - \frac{2Mv^2}{2}, \quad \mu mgs_2 = \frac{mM\,(4M+m)}{4\,(2M+m)^2} v_0^2,$$

откуда $s^2 = \dfrac{M\,(4M+m)\,v_0^2}{4\,(2M+m)^2\, g\mu}$. Путь s равен разности $s_2 - s_1$, $s = \dfrac{Mv_0^2}{4\,(2M+m)\, g\mu}$. Отсюда $\mu = \dfrac{Mv_0^2}{4\,(2M+m)\, gs}$.

Ответ: $\mu = \dfrac{Mv_0^2}{4\,(2M+m)\, gs}$, $\mu \approx 0{,}2$.

1.64. Рассмотрим силы, действующие на каждое из тел (рис. 1.58). Из равновесия грузов массами m_1 и m_3 следует, что реакции нитей равны силам тяжести грузов:

$$T_1 = m_1 g, \quad T_3 = m_3 g.$$

Для груза массой m_2 рассмотрим проекции сил на направление вдоль наклонной плоскости и перпендикулярно к ней:

$$(m_2 g \sin \alpha + F_{\text{тр}} - T'_1) = 0,$$

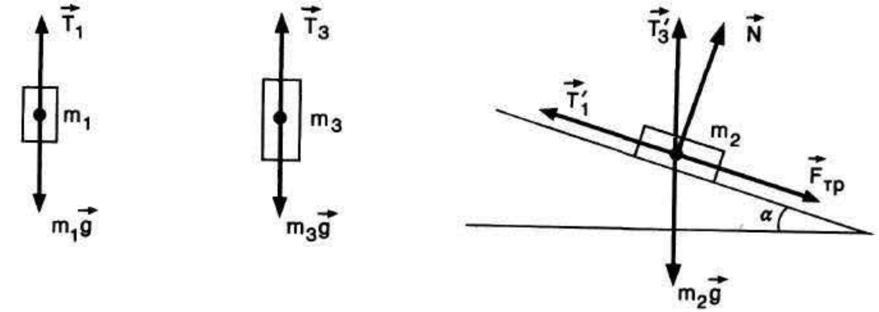


Рис. 1.58

$$N + T'_3 \cos \alpha - m_2 g \cos \alpha = 0.$$

Учитывая, что в момент нарушения равновесия груза массой m_2 сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N$, а $N = (m_2 - m_3)\, g \cos \alpha$, получим:

$$m_1 = m_2 \sin \alpha + \mu\,(m_2 - m_3) \cos \alpha.$$

В задаче требуется определить максимальную массу m_1, поэтому мы считали, что груз массой m_2 движется вверх по наклонной плоскости, а сила трения направлена вниз. Учитывали также тот факт, что по третьему закону Ньютона

$$\vec{T}'_1 = -\vec{T}_1, \quad \vec{T}'_3 = -\vec{T}_3.$$

Ответ: $m_1 = m_2 \sin \alpha + \mu\,(m_2 - m_3) \cos \alpha$, $m_1 \approx 443$ г.

1.65. Рассмотрим силы, действующие на доску со стороны стенок (рис. 1.59). Толщиной доски пренебрегаем. Направление

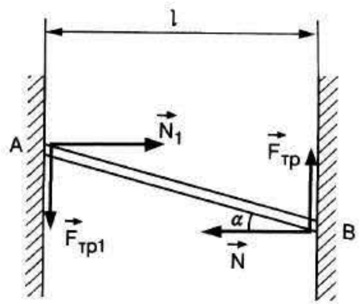


Рис. 1.59

сил трения выбрано из предположения, что конец A доски «стремится выскочить» из ямы, а конец B, наоборот, упасть в нее. Под ямой подразумевается пространство между вертикальными стенками.

$\vec{N}$ и $\vec{N}_1$ — силы реакции стенок.

$\vec{F}_{тр}$ и $\vec{F}_{тр\,1}$ — силы трения.

Запишем условие равновесия: алгебраическая сумма моментов сил относительно оси, проходящей через точку A, равна нулю:

$$NL\sin\alpha - F_{тр}L\cos\alpha = 0.$$

Так как $F_{тр} \leqslant \mu N$, а $F_{тр}/N = \operatorname{tg}\alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha \leqslant \mu$.

Окончательно

$$L = l/\cos\alpha;\ L = l\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha},\ L \leqslant l\sqrt{1+\mu^2}.$$

Условие равновесия можно рассматривать и относительно оси, проходящей через точку B. Проверьте, что ответ будет такой же.

Ответ: $L \leqslant l\sqrt{1+\mu^2}$, $L \leqslant 3{,}06$ м.

1.66. Силы, действующие на куб и на тело, показаны на рисунке 1.60: $\vec{F}_д$ — сила давления тела на куб, $\vec{F}_{тр}$ — сила трения,

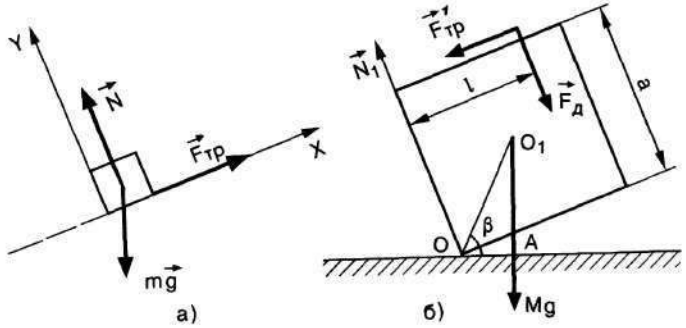


Рис. 1.60

действующая на куб. Не забывайте о третьем законе Ньютона: сила действия равна силе противодействия, т. е. $\vec{F}'_{тр} = -\vec{F}_{тр}$, $\vec{F}_д = -\vec{N}$. Для равновесия куба необходимо, чтобы сумма моментов сил относительно оси, проходящей через точку, например O, была равна нулю:

$$F_{тр}a - F_д l - Mga\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = 0. \quad (1)$$

Из условия равновесия тела на клине (проекция сил на ось OY равна нулю) определим силу реакции опоры: $N = F_д = mg\cos\alpha$. Проекция сил на ось OX дает условие

$$mg\sin\alpha \leqslant \mu mg\cos\alpha. \quad (2)$$

Подставим в (1) эти условия:

$$amg\sin\alpha - lmg\cos\alpha - Mga\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)\frac{\sqrt{2}}{2} = 0. \quad (3)$$

Разделим уравнение (3) на $\cos\alpha$, получим:

$$mga\operatorname{tg}\alpha - mgl - \frac{Mga}{2} + \frac{Mga}{2}\operatorname{tg}\alpha = 0.$$

Выразим $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2ml+Ma}{2ma+Ma},$$

тогда

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2ml+Ma}{(2m+M)a}.$$

Решая неравенство (2), получим $\mu \geqslant \operatorname{tg}\alpha$ или

$$\mu \geqslant \frac{2ml+Ma}{(2m+M)a}.$$

Равновесие неустойчивое, так как при любом изменении угла α или расстояния l возникает момент сил, стремящийся увести систему еще дальше от положения равновесия.

Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{2ml+Ma}{a(2m+M)}$, $\alpha \approx 41°$;

$$\mu \geqslant \frac{2ml+Ma}{a(2m+M)},\ \mu \approx 0{,}875.$$

Равновесие неустойчивое.

1.67. Силы, действующие со стороны тел массами m_1 и m_2 на клин, показаны на рисунке 1.61. Силы давления $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, равные

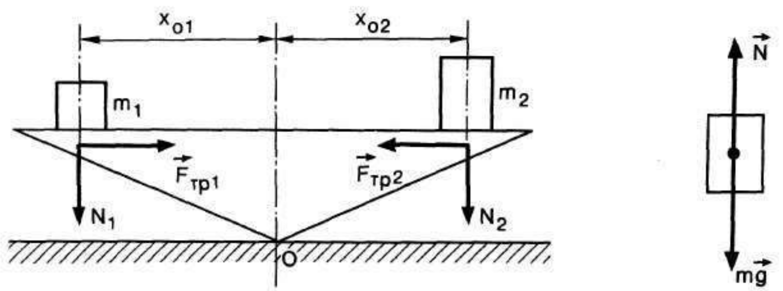


Рис. 1.61

по модулю силам реакции опоры клина на каждое тело, определим из условия равновесия грузов. На грузы в вертикальном направлении действуют только силы тяжести и силы реакции опоры, поэтому

$$\begin{cases} N_1 = m_1 g, \\ N_2 = m_2 g. \end{cases} \quad (1)$$

Силы трения определим как максимальные силы трения покоя, так как сразу же начинается скольжение: $F_{\text{тр}\,1} = \mu_1 m_1 g$, $F_{\text{тр}\,2} = \mu_2 m_2 g$. В начальный момент времени система находится в равновесии, следовательно, сумма моментов сил относительно оси, проходящей через ребро, на котором стоит клин (точка O на рисунке), равна нулю:

$$N_1 x_{01} + F_{\text{тр}\,2} h - N_2 x_{02} - F_{\text{тр}\,1} h = 0, \quad (2)$$

где h — высота клина — плечо для сил трения, x_{01} и x_{02} — плечи для сил давления грузов на клин в начальный момент времени. В любой момент времени, чтобы клин не опрокинулся, должно также выполняться условие равновесия для моментов всех сил относительно этой же оси. Таким образом,

$$N_1 x_1 + F_{\text{тр}\,2} h - N_2 x_2 - F_{\text{тр}\,1} h = 0, \quad (3)$$

где x_1 и x_2 — плечи для сил N_1 и N_2 в любой момент времени. Вычитая (3) из (2), используя также систему (1), получим:

$$m_1 g s_1 = m_2 g s_2, \quad (4)$$

или $m_1/m_2 = s_2/s_1$,
где s_1 и s_2 — пути, пройденные телами к моменту времени t,

$$s_1 = x_{01} - x_1,$$
$$s_2 = x_{02} - x_2,$$

с другой стороны,

$$s_1 = v_1 t - a_1 t^2/2, \quad (5)$$
$$s_2 = v_2 t - a_2 t^2/2. \quad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (4), получим:

$$m_1\left(v_1 - \frac{a_1 t}{2}\right) = m_2\left(v_2 - \frac{a_2 t}{2}\right), \quad (7)$$

откуда

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 a_1 - m_2 a_2)\,\frac{t}{2}. \quad (8)$$

Это уравнение дает условие равновесия системы при движении тел для данного момента времени t. Для того чтобы условие (8) выполнялось в любой момент времени, необходимо, чтобы его правая часть равнялась нулю, т. е.

$$m_1 a_1 = m_2 a_2. \quad (9)$$

При отсутствии дополнительной силы F ускорения $a_{10} = a_{20} = \mu g$. Чтобы выполнялось равенство (9), необходимо либо увеличить ускорение тела с малой массой, подействовав на него дополнительной силой F_1, либо уменьшить ускорение тела с большей массой, приложив к нему силу F_2. В нашем случае $m_1 < m_2$ и соотношение (9) удовлетворяется тогда, когда

$$m_1\left(\mu g + \frac{F_1}{m_1}\right) = m_2 \mu g, \quad (10)$$

или

$$m_1 \mu g = m_2\left(\mu g - \frac{F_2}{m_2}\right). \quad (11)$$

Из соотношений (10) и (11) получим значения сил:

$$F_1 = (m_2 - m_1)\,\mu g, \quad (12)$$
$$F_2 = (m_2 - m_1)\,\mu g. \quad (13)$$

Для выполнения условия (9) правая часть соотношения (8) обращается в нуль, поэтому

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (14)$$

Из (12) и (13) видно, что для выполнения условия задачи необходимо или тормозить тело массой m_2, или разгонять тело массой m_1 с силой $F = (m_2 - m_1)\,\mu g$.

Ответ: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} = 2$; $F = (m_2 - m_1)\,\mu g$, $F = 0{,}98$Н.

1.68. В положении равновесия сумма сил, действующих на груз со стороны пружин, равна нулю. На рисунке 1.62 положение равновесия соответствует точке C.

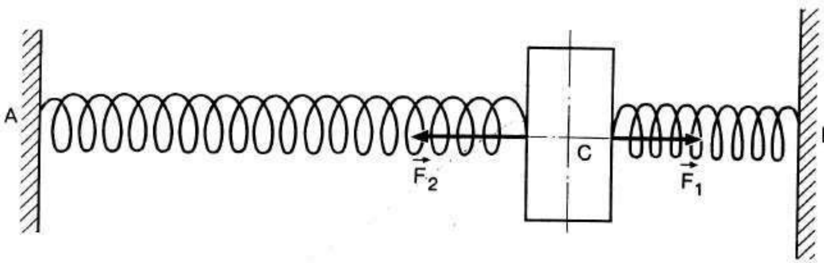


Рис. 1.62

Сила $F_1 = k_1 a_1$, а $F_2 = k_2 a_2$, где a_1 — абсолютная деформация сжатия левой пружины, а a_2 — абсолютная деформация сжатия правой пружины при равновесии. Общая длина деформации пружин задана:

$$a = a_1 + a_2.$$

Условием равновесия $k_1 a_1 = k_2 a_2$ воспользуемся для определения сжатия пружин a_1 и a_2: $a=a_1+a_1\frac{k_1}{k_2}$, откуда $a_1=\frac{k_2}{k_1+k_2}a$, $a_2=\frac{k_1}{k_1+k_2}a$.

По закону сохранения энергии

$$\frac{k_2a^2}{2}=\frac{k_1a_1^2}{2}+\frac{k_2a_2^2}{2}+\frac{mv^2}{2},$$

где v — скорость груза при прохождении положения равновесия. Определим эту скорость:

$$v=\frac{k_2a}{\sqrt{m(k_1+k_2)}}.$$

Амплитуда колебаний $A=a_1$, так как a_1 — путь, пройденный грузом от крайнего правого положения до положения равновесия.

Можно определить амплитуду другим способом. Потенциальная энергия пружин при нахождении груза в крайнем левом положении равна $W_n=\frac{k_1x^2}{2}+\frac{k_2(a-x)^2}{2}$. Приравняем это значение к энергии пружины, которую мы ей сообщили:

$$\frac{k_2a^2}{2}=\frac{k_1x^2}{2}+\frac{k_2(a-x)^2}{2}.$$

Отсюда найдем максимальное смещение правого конца левой пружины:

$$x=\frac{2k_2}{k_1+k_2}a,\quad x=2a_1.$$

Тогда амплитуда колебаний $A=x-a_1=a_1$.

Ответ: $v=\frac{k_2a}{\sqrt{m(k_1+k_2)}}$, $v\approx1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$;

$$A=\frac{k_2}{k_1+k_2}a,\quad A=25\ \text{см}.$$

1.69. Для определения амплитуды колебаний рассмотрим силы, вызывающие колебания груза. Это сила тяжести и сила упругости, возникающая в нити. Под действием именно силы тяжести возникает движение. По закону гармонических колебаний сила пропорциональна смещению. Следовательно, $mg=kA$, откуда $A=mg/k$.

Из закона сохранения энергии, пренебрегая потерями, находим скорость груза при прохождении им положения равновесия:

$$\frac{kA^2}{2}=\frac{mv^2}{2},$$

$$v=A\sqrt{\frac{k}{m}}=g\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ответ: $A=mg/k$, $A\approx2{,}5$ см; $v=g\sqrt{\frac{m}{k}}$, $v\approx0{,}49$ м/с.

1.70. Рассмотрим колебания груза на пружине и математического маятника. Для груза на пружине максимальная возвращающая сила

$$F=kA,\qquad(1)$$

где A — амплитуда колебаний, k — жесткость пружины. Для математического маятника

$$\frac{F}{mg}=\sin\alpha=\frac{A}{l},\qquad(2)$$

где α — максимальный угол отклонения от положения равновесия, l — длина маятника, $A=BC$ — амплитуда (рис. 1.63).

В крайней точке полная энергия колеблющегося тела равна его потенциальной энергии. Для груза на пружине полная энергия

$$E=\frac{kA^2}{2},\qquad(3)$$

для маятника

$$E=mgl(1-\cos\alpha)\qquad(4)$$

или $E=2mgl\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

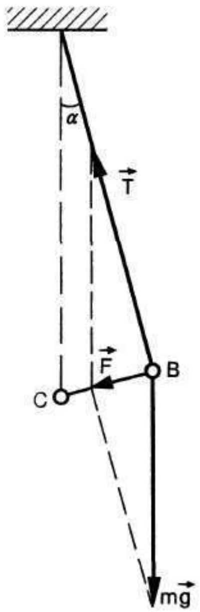


Рис. 1.63

Для гармонических колебаний угол α мал, и $\sin\alpha\approx\alpha$, тогда энергия

$$E=\frac{1}{2}mgl\alpha^2=\frac{1}{2}mg\frac{A^2}{l}.\qquad(5)$$

Разделив (3) на (1), а также (5) на (2), получим:

$$A=\frac{2E}{F}.\qquad(6)$$

Для гармонических колебаний полная энергия колеблющегося тела и максимальная возвращающая сила связаны с амплитудой колебаний соотношением (6). Выражение (6) не зависит от величин, описывающих конкретные свойства колеблющейся системы, т. е. от k, m, l, g. Амплитуда зависит только от начальных условий, т. е. от энергии, сообщенной системе.

Уравнение гармонических колебаний:

$$x=\frac{2E}{F}\sin(2\pi\nu t+\varphi_0),$$

$x=4\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$, где x выражено в сантиметрах.

Ответ: $x=\frac{2E}{F}\sin(2\pi\nu t+\varphi_0)$, $\quad x=0{,}04\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$.

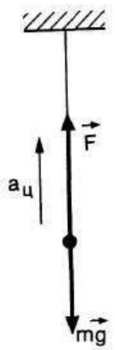


Рис. 1.64

1.71. Запишем для математического маятника уравнение второго закона Ньютона:

$$F - mg = m\frac{v^2}{l}.$$

Силы, действующие на груз, показаны на рисунке 1.64: $m\vec{g}$ — сила тяжести, $\vec{F}$ — сила реакции нити. Эти силы вызывают центростремительное ускорение, равное v^2/l. Кинетическая энергия определяется из соотношения

$$E = \frac{mv^2}{2},\ E = \frac{lF - mgl}{2}.$$

Ответ: $E = \frac{l}{2}(F - mg)$, $E = 0{,}05$ Дж.

1.72. Сжатие пружинки будет максимально, когда скорости тел относительно Земли сравняются. Оба тела будут двигаться как единое целое. Закон сохранения импульса при этом запишется следующим образом:

$$m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = 2m\vec{v}.$$

В проекции на ось OX (выбранное направление)

$$mv_1 - mv_2 = 2mv.$$

Закон сохранения энергии для этого случая:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = 2\frac{mv^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2},$$

где x_0 — амплитуда колебаний.

Решая два последних уравнения, получим:

$$x_0 = (v_1 + v_2)\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

Проверим размерность:

$$[x_0] = \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{Н}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}}\right)^{\frac{1}{2}} = \text{м}.$$

Ответ: $x = (v_1 + v_2)\sqrt{\frac{m}{2k}}$, $x = 2{,}5$ см.

II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

2.1. В этой и следующих задачах рассматриваются удары молекул газа о стенки сосуда. Молекулы газа непрерывно и хаотично двигаются, и в различные моменты и промежутки времени о единицу поверхности, конечно, ударяется различное число молекул. Но молекул много! В одном моле их содержится $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ молекул/моль (число Авогадро). И при этом из хаоса рождается порядок! С большой степенью точности можно считать, что в любой момент времени вдоль одного из трех взаимно перпендикулярных направлений движется $\frac{1}{3}$ всех молекул, находящихся в некотором объеме; из них половина движется в одну сторону, а половина — в противоположную. Считают, что вероятность попадания молекул на стенку, перпендикулярную одному направлению, равна $\frac{1}{6}$ от общего числа молекул.

Число ударов молекул, движущихся в одном направлении, о поверхность площадью S равна $\frac{1}{6}N$, где N — число молекул в некотором объеме. Будем считать, что все молекулы движутся с одинаковой скоростью v. Тогда за время Δt на эту поверхность попадут молекулы, находящиеся в объеме $v\Delta tS$. Число ударов равно $\frac{1}{6}nv\Delta tS$, n — число молекул в единице объема (концентрация). Число ударов о единицу поверхности в единицу времени равно $\nu = \frac{1}{6}nv$. Скорость молекул v — это средняя квадратичная скорость молекул $v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$, где R — универсальная газовая постоянная, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К), M — молярная масса, T — температура по шкале Кельвина.

Предположим, вы забыли значение этой скорости, но помните, что средняя кинетическая энергия одноатомной молекулы равна $\varepsilon = \frac{3}{2}kT$, где k — постоянная Больцмана, $k = 1{,}38 \times 10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$. Приравняйте это соотношение к кинетической энергии (из механики): $\frac{3}{2}kT = \frac{m_0v^2}{2}$. Тогда $v = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$, но $R = kN_A$, а $M=m_0N_A$. Окончательно $v=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$. Выразим концентрацию n молекул через плотность газа ρ, его молярную массу M. Количество вещества ν_0 (число молей) можно выразить как через массу газа m/M, так и через число молекул и число Авогадро $\nu_0=N/N_A$, при этом $m=\rho V$, $N=nV$. Приравняем эти соотношения: $\frac{\rho V}{M}=\frac{nV}{N_A}$, получим $n=\rho\frac{N_A}{M}$. Таким образом,

$$\nu=\frac{1}{6}\frac{N_A\rho}{M}\sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Проверим размерность:

$$[\nu]=\frac{\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{м}^3\cdot\text{кг}}\left(\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\text{м}^3}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}}=\frac{1}{\text{м}^2\cdot\text{с}}.$$

Ответ: $\nu=\frac{1}{6}\frac{N_A\rho}{M}\sqrt{\frac{3RT}{M}}$,

$\nu=6\cdot10^{27}\text{м}^{-2}\text{с}^{-1}$.

2.2. Посмотрите решение задачи 2.1. В данной задаче концентрацию n выразим через давление газа: $p=nkT$, где k — постоянная Больцмана. Следовательно, $\nu=\frac{1}{6}p\sqrt{\frac{3N_A}{MkT}}$. Размерность проверьте самостоятельно.

Ответ: $\nu=\frac{1}{6}p\sqrt{\frac{3N_A}{MkT}}$,

$\nu=5{,}5\cdot10^{27}\text{м}^{-2}\text{с}^{-1}$.

2.3. Число ударов молекул азота о единицу площади поверхности стенки сосуда в единицу времени равно $\nu_1=\frac{1}{6}p_1\sqrt{\frac{3N_A}{M_1kT}}$, где p_1 — парциальное давление азота, M_1 — его молярная масса. Аналогично для кислорода $\nu_2=\frac{1}{6}p_2\sqrt{\frac{3N_A}{M_2kT}}$. По закону Дальтона давление смеси газов $p=p_1+p_2$. Давление каждого газа зависит от его молярной массы согласно уравнению Менделеева-Клапейрона: $p_1V=\frac{m}{M_1}RT$, $p_2V=\frac{m}{M_2}RT$. По условию задачи газы занимают один объем, имеют одинаковую массу и находятся при одной температуре, поэтому

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{M_2}{M_1},\quad \frac{p_1+p_2}{p_1}=\frac{M_1+M_2}{M_2}\quad\text{и}\quad\frac{p_1+p_2}{p_2}=\frac{M_1+M_2}{M_1}.$$

Из полученных уравнений определяем парциальные давления газов:

$$p_1=p\frac{M_2}{M_1+M_2},\quad p_2=p\frac{M_1}{M_1+M_2}.$$

Окончательно находим:

$$\nu_1=\frac{1}{6}p\frac{M_2}{M_1+M_2}\sqrt{\frac{3N_A}{M_1kT}},$$

$$\nu_2=\frac{1}{6}p\frac{M_1}{M_1+M_2}\sqrt{\frac{3N_A}{M_2kT}}.$$

Число ударов пропорционально давлению смеси газов и обратно пропорционально корню квадратному из температуры смеси. И что интересно, зависит от того, какой еще газ находится в сосуде, т. е. какой газ, вернее, молекулы какого газа «мешают» этим молекулам ударяться о стенки сосуда.

Ответ: $\nu_1=\frac{1}{6}p\frac{M_2}{M_1+M_2}\sqrt{\frac{3N_A}{M_1kT}}$, $\nu_1=1{,}1\cdot10^{27}\text{м}^{-2}\text{с}^{-1}$;

$\nu_2=\frac{1}{6}p\frac{M_1}{M_2+M_1}\sqrt{\frac{3N_A}{M_2kT}}$, $\nu_2=0{,}9\cdot10^{27}\text{м}^{-2}\text{с}^{-1}$.

2.4. Скорость роста покрытия равна отношению толщины покрытия h к времени напыления Δt. Толщину покрытия выразим через объем и площадь: $h=\frac{V}{S}$, а объем — через массу m всего серебра и его плотность:

$$V=\frac{m}{\rho}.\ \text{Тогда}\ v=\frac{h}{\Delta t}=\frac{V}{S\Delta t}=\frac{m}{\rho S\Delta t}. \qquad (1)$$

Давление, оказываемое на стенку молекулами серебра, определим через отношение силы, действующей перпендикулярно стенке к площади стенки. Силу определим через изменение импульса Δp всех N атомов, попадающих на стенку: $p=\frac{F}{S}$, $F=\frac{\Delta p}{\Delta t}$. Молекулы прилипают к стенке, поэтому изменение импульса равно самому импульсу налетающих молекул: $\Delta p=m_0v_0$, где m_0 — масса каждой молекулы; $m_0=\frac{M}{N_A}$, где M — молярная масса, N_A — число Авогадро. Скорость определим, зная энергию:

$$v_0=\sqrt{2E/m_0}.$$

Таким образом,

$$p=\frac{\Delta pN}{\Delta t\,S}=\frac{mv_0N}{\Delta tS}=\frac{N\sqrt{2m_0E}}{S\Delta t}, \qquad (2)$$

откуда

$$N=pS\Delta t/\sqrt{2m_0E}. \qquad (3)$$

Масса серебра в покрытии $m=m_0N$. Следовательно, скорость роста толщины покрытия получим, подставляя (3) и (2) в (1):

$$v=\frac{m_0 p\Delta tS}{\sqrt{2m_0E}\,\rho\Delta tS}=\frac{p}{\rho}\sqrt{\frac{m_0}{2E}}=\frac{p}{\rho}\sqrt{\frac{M}{2EN_A}}\,.$$

Проверим размерность:

$$[v]=\frac{\text{Па}\cdot\text{м}^3}{\text{кг}}\left(\frac{\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{Дж}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}^3}{\text{с}^2\cdot\text{м}^2\cdot\text{кг}}\left(\frac{\text{кг}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\text{м}}{\text{с}}\,.$$

При решении этой задачи мы использовали некоторые соотношения из механики. Это будет справедливо, если молекулы серебра (вернее, атомы) рассматривать как материальные точки, подчиняющиеся законам механики.

Ответ: $v=\frac{p}{\rho}\sqrt{\frac{M}{2EN_A}}$, $v=9\cdot10^{-8}$ м/с.

2.5. Химическая формула соединения C_xH_y. Молярная масса соединения $M=xM_c+yM_н=12x+y$. С другой стороны, молярную массу можно определить из уравнения Менделеева-Клапейрона $pV=\frac{m}{M}RT$: $M=\rho\frac{RT}{p}$, где $\rho=\frac{m}{V}$, $M=58$. Следовательно, $12x+y=58$, где x и y — целые числа. Подбором находим: $x=4$, $y=10$.

Ответ: формула соединения C_4H_{10}.

2.6. *I способ.* Из уравнения Менделеева-Клапейрона $pV=\frac{m}{M}RT$ выразим массу воздуха и найдем отношение масс $\frac{m_1}{m_2}=\frac{T_2}{T_1}$, откуда

$$\frac{m_1-m_2}{m_1}=\frac{T_2-T_1}{T_2}\,;\ \Delta m=m_1-m_2=m_1\frac{\Delta T}{T_1+\Delta T}\,.$$

II способ. Задачу можно решить еще так: запишите уравнение Менделеева-Клапейрона для каждого состояния:

$$pV=\frac{m_1}{M}RT_1,$$
$$pV=\frac{m_2}{M}RT_2.$$

Выразите массы и определите разность масс, учитывая, что нам известны разность температур и начальная масса; давление и объем не изменяются:

$$m_1=\frac{pVM}{RT_1}\,,\ m_2=\frac{pVM}{RT_2}\,;$$

$$\Delta m=\frac{pVM}{R}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right),\ \Delta m=p\frac{VM}{R}\frac{\Delta T}{T_2T_1}=m_1\frac{\Delta T}{T_1+\Delta T}\,.$$

Ответ: $\Delta m=m_1\frac{\Delta T}{T_1+\Delta T}$, $\Delta m=4$ кг.

2.7. Запишем уравнение объединенного газового закона:

$$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_0V_2}{T_0}\,.$$

Нормальные условия — это давление $p_0=10^5$ Па, температура $T_0=273$ К. Не забывайте переводить температуру из шкалы Цельсия в шкалу Кельвина. В этой задаче литры можно не переводить в кубические метры, ответ можно получить в литрах.

$$V_2=\frac{p_1V_1T_0}{T_1p_0}\,.$$

Ответ: $V_2=p_1V_1T_0/(T_1p_0)$, $V_2=9{,}5$ л.

2.8. Газ занимает весь предоставленный ему объем, поэтому после соединения с пустым сосудом объем газа равен $V=V_1+V_2$. Запишем уравнение изотермического процесса: $p_1V_1=p_2(V_1+V_2)$, откуда $p_2=p_1V_1/(V_1+V_2)$.

Ответ: $p_2=p_1V_1/(V_1+V_2)$, $p_2=6\cdot10^4$ Па $=60$ кПа.

2.9. Запишем закон Бойля-Мариотта (изотермический процесс): $p_1V_1=p_2V_2$, или $p_2/p_1=V_1/V_2$. Отнимем от обеих частей уравнения по единице: $-1+\frac{p_2}{p_1}=\frac{V_1}{V_2}-1$. Тогда $\frac{p_2-p_1}{p_1}=\frac{V_1-V_2}{V_2}$. Окончательно получим

$$p_1=\Delta p\frac{V_2}{V_1-V_2}\,.$$

Ответ: $p_1=\Delta p\frac{V_2}{V_1-V_2}$, $p_1=120$ кПа.

2.10. По закону Бойля-Мариотта для воздуха в первом сосуде $p_1V_1=p_1'(V_1+V_2)$, для воздуха во втором сосуде $p_2V_2=p_2'(V_1+V_2)$, где p_1' и p_2' — давления после соединения сосудов. По закону Дальтона $p=p_1'+p_2'$. Поэтому $p=\frac{p_1V_1+p_2V_2}{V_1+V_2}$.

Ответ: $p=\frac{p_1V_1+p_2V_2}{V_1+V_2}$, $p=90$ кПа.

2.11. При смещении поршня объем одной части цилиндра увеличивается на $\Delta V=dS$, а другой на столько же уменьшается. При равновесии давление на поршень слева и справа одинаково. Уравнения Менделеева-Клапейрона для обеих частей цилиндра $p(V+\Delta V)=\frac{nm}{M}RT$, $p(V-\Delta V)=\frac{m}{M}RT$. После деления одного уравнения на другое получаем $\frac{V+\Delta V}{V-\Delta V}=n$, откуда $\Delta V=\frac{V(n-1)}{n+1}$. Следовательно,

$$d=\frac{\Delta V}{S}=\frac{V(n-1)}{S(n+1)}\,.$$

Ответ: $d=V\frac{n-1}{S(n+1)}$, $d=5$ см.

2.12. При нагревании газа объем одной части цилиндра увеличивается на $\Delta V=dS$, а другой части на столько же уменьшается. При равновесии давление на поршень слева и справа одинаково. Давление в этой части цилиндра выразим из объединенного газового закона $\frac{p_0V_0}{T_0}=\frac{p(V_0+\Delta V)}{T_0+\Delta T}$, а в другой — из закона Бойля-Мариотта $p_0V_0=p(V_0-\Delta V)$. Решая уравнения совместно, получаем $\Delta V=\frac{V_0\Delta T}{2T_0+\Delta T}$.

Смещение поршня равно отношению изменения объема к площади сечения поршня: $d=\Delta V/S$, $d=\frac{V_0\Delta T}{S(2T_0+\Delta T)}$.

Ответ: $d=\frac{V_0\Delta T}{S(2T_0+\Delta T)}$, $d=1$ см.

2.13. *I способ.* Изменение объемов в обеих частях цилиндра показано на рисунке 2.1. Температура газа после установления равновесия не изменяется, следовательно, к газу в каждой части цилиндра можно применить закон изотермического процесса:

$$p_0V_1=p(V_1+\Delta V_1),\ p_0V_2=p(V_2-\Delta V_2),$$

где p_0 и p — начальное и конечное давление, V_1 и V_2 — начальные объемы газа, ΔV_1, ΔV_2 — изменение объема при смещении поршней. Из уравнения Менделеева-Клапейрона следует, что $\frac{V_1}{V_2}=\frac{m_1}{m_2}$, или $V_2=\frac{m_2}{m_1}V_1$. Подставим V_2 в закон Бойля-Мариотта (изотермический процесс) и, разделив уравнения, получим $\frac{\Delta V_1}{\Delta V_2}=\frac{m_1}{m_2}$. Кроме того, $\Delta V_1+\Delta V_2=\Delta V$, где $\Delta V=bS$, $\Delta V_1=aS$, S —

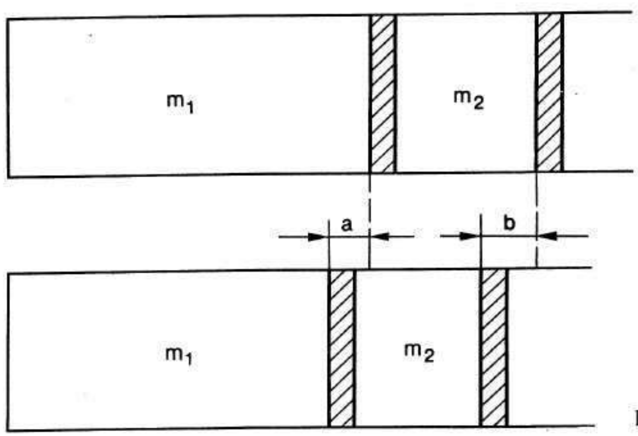


Рис. 2.1

площадь поршня. Поэтому $aS+aS\frac{m_2}{m_1}=bS$, откуда $a=\frac{bm_1}{m_1+m_2}$, $a=b\frac{1}{1+1/3}$, $a=\frac{3}{4}b$.

Задачу можно решить и другим способом.

II способ. Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для каждой части до и после перемещения поршня. Учтем, что в левой части цилиндра объем увеличивается на aS, а в правой части увеличивается на bS и уменьшается на aS. Тогда

$$\begin{cases} pV_1=\nu_1RT, & (1) \\ p_1(V_1+aS)=\nu_1RT; & (2)\ \text{(для левой части)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} pV_2=\nu_2RT, & (3) \\ p_2(V_2+bS-aS)=\nu_2RT. & (4)\ \text{(для правой части)} \end{cases}$$

Газы в обеих частях цилиндра одинаковые, следовательно, $\frac{m_1}{m_2}=\frac{\nu_1}{\nu_2}=n$, $n=3$, откуда $\nu_1=n\nu_2$. Сравнивая (1) и (3), получим $V_1=\frac{\nu_1}{\nu_2}V_2$, $V_1=nV_2$. При этом мы учитывали, что движение поршня прекращается, когда давления в обеих частях цилиндра уравниваются. Заменим в (4) $\nu_2=\frac{\nu_1}{n}$ и подставив в (2), получим: $p_1(V_2+bS-aS)=\frac{1}{n}p_1(V_1+aS)$, или $nS(b-a)=Sa$, откуда $a=nb/(n+1)$. Окончательно $a=\frac{b}{1+\frac{1}{n}}$; $a=b/\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)$.

Ответ: $a=b/\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)$, $a=3$ см.

2.14. Относительная влажность определяется отношением давления паров, находящихся в цилиндре, к давлению насыщенных паров при этой же температуре: $f=\frac{p}{p_н}$, откуда получаем $p=p_н f$. Процесс сжатия происходит при постоянной температуре — изотермический процесс. Запишем уравнение этого процесса: $pV_0=p_нV$. Определим объем и соответственно отношение объемов: $V_0=V\frac{p_н}{p}$, $V_0/V=p_н/p$, $\frac{V_0}{V}=\frac{1}{f}$.

Ответ: $\frac{V_0}{V}=\frac{1}{f}$, $V_0/V=2{,}5$.

2.15. Уравнение изохорного процесса $\frac{p_1}{T_1}=\frac{p_2}{T_2}$, давление определим через давление насыщенных паров и относительную влажность: $p_1=f_1p_{1н}$, $p_2=\frac{1}{T_2}p_{2н}$. Следовательно, $\frac{f_1p_{1н}}{T_1}=\frac{f_2p_{2н}}{T_2}$, откуда $f_2=f_1\frac{p_{1н}T_2}{p_{2н}T_1}$.

Ответ: $f_2=f_1\frac{p_{1н}T_2}{p_{2н}T_1}$.

2.16. Состояние насыщенного водяного пара можно описать уравнением Менделеева-Клапейрона $pV=\frac{m}{M}RT$, где M — молярная масса воды, $M=18\cdot10^{-3}$ кг/моль. Определим давление: $p=\frac{mRT}{MV}$.

Ответ: $p=\frac{mRT}{MV}$, $p=3{,}9$ кПа.

2.17. Давление насыщенных паров воды определим из уравнения Менделеева-Клапейрона $pV=\frac{m}{M}RT$, $p=\frac{mRT}{VM}$, где M — молярная масса воды, $M=18\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Ответ: $p=\frac{mRT}{MV}$, $p=2{,}6$ кПа.

2.18. На рисунке 2.2 представлен график зависимости плотности насыщенного пара от температуры в области заданных температур. Из графика видно, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\rho-\rho_1}{T-T_1}=\frac{\rho_2-\rho_1}{T_2-T_1},$$

откуда

$$T=T_1+(T_2-T_1)\frac{\rho-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}.$$

Плотность пара до сжатия определяется через относительную

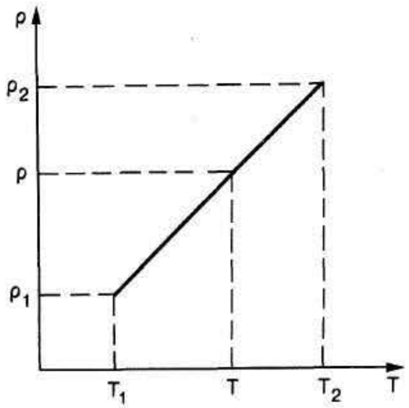


Рис. 2.2

влажность $\rho_0=f\rho_1$, где ρ_0 — абсолютная влажность. Напомним, что относительная влажность определяется и как отношение объемов газа при данных условиях к давлению насыщенного пара, и как отношение абсолютной влажности к плотности насыщенных паров. Абсолютная влажность — это плотность паров воды, находящихся в воздухе при данной температуре. Точка росы — это температура, при которой начинается конденсация пара, т. е. та температура, при которой пар становится насыщенным.

После сжатия плотность пара возрастает в $n=2$ раза, таким образом, $\rho=nf\rho_1$. Окончательно

$$T=T_1+(T_2-T_1)\frac{\rho_1(nf-1)}{\rho_2-\rho_1}.$$

Ответ: $T=T_1+(T_2-T_1)\rho_1(nf-1)/(\rho_2-\rho_1)$, $T=285$ К, $t=12$ °С.

2.19. Работа при изобарном процессе $A=p\Delta V$.

Запишем для двух состояний уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$pV_1=\frac{m}{M}RT_1;\ pV_2=\frac{m}{M}RT_2.$$

Вычтем из второго уравнения первое, получим $p\Delta V=\frac{m}{M}R\Delta T$. Следовательно, $A=\frac{m}{M}R\Delta T$.

Внимание! Работа при изобарном процессе может зависеть как от изменения объема: $A=p\Delta V$, так и от изменения температуры. Этот же результат вы можете получить и через уравнение изобарного процесса $\frac{V_1}{T_1}=\frac{V_2}{T_2}$, т. е.

$$A=p\Delta V=\frac{m}{M}R\Delta T.$$

Ответ: $A=\frac{m}{M}R\Delta T$, $A=8{,}3$ Дж.

2.20. Воспользуемся результатом задачи 2.19:

$$A=\frac{m}{M}R(T_2-T_1).$$

При изобарном нагревании объем прямо пропорционален температуре $\frac{V_1}{V_2}=\frac{T_1}{T_2}$.

Получим $A=\frac{m}{M}RT_1\left(\frac{T_2}{T_1}-1\right)=\frac{m}{M}RT_1(n-1)$, $T_1=t+273=$ $=300$ (К).

В этой и предыдущих задачах мы не проверяли размерность полученного результата, так как из окончательной формулы это легко прослеживалось. Универсальная газовая постоянная имеет размерность $\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$, а кроме нее, в формулу входят величина m/M в молях (количество вещества или число молей) и температура T в К. Следовательно, единица работы — Дж.

Ответ: $A=\frac{m}{M}RT_1(n-1)$, $A=12{,}5$ кДж.

2.21. Изобразим оба процесса в координатах (p, V) (рис. 2.3). При изохорном процессе работа не совершается, при изобарном процессе работа равна $A=p_2(V_2-V_1)$.

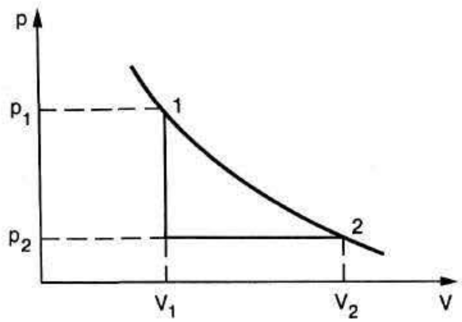


Рис. 2.3

Точки *1* и *2* лежат на одной изотерме, поэтому

$$p_1V_1=p_2V_2=\frac{m}{M}RT,$$

где

$$p_2=p_1/n,\ \ V_1=V_2/n.$$

Итак,

$$p_2V_2=\frac{m}{M}RT,$$

$$p_2V_1=p_2\frac{V_2}{n}=\frac{m}{M}RT\frac{1}{n}.$$

Следовательно, работа равна

$$A=\frac{m}{M}RT-\frac{m}{M}\frac{RT}{n}=\frac{m}{M}RT\frac{n-1}{n}.$$

В этой задаче мы воспользовались графиком зависимости давления от объема и работу определяли, используя этот график. Вспомните задачи из механики, где аналогично определялся пройденный путь по графикам зависимости скорости от времени (задачи 1.2, 1.7).

Ответ: $A=\frac{m}{M}RT\frac{n-1}{n}$, $A=1440$ Дж.

2.22. Изобразим круговой процесс в координатах (p, V). Этот процесс показан на рисунке 2.4. Работа за цикл равна площади прямоугольника:

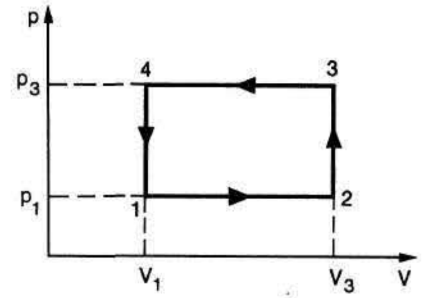


Рис. 2.4

$$A=(p_3-p_1)(V_3-V_1).$$

Выразим давления p_3 и p_1 из объединенного газового закона, записав его для состояний *1* и *3* и для нормальных условий (p_0, V_0). Напомним: нормальные условия $p_0=10^5$ Па, $T_0=273$ К.

$$\frac{p_1}{T_1}=\frac{p_3V_3}{T_3}=\frac{p_0V_0}{T_0},$$

откуда

$$p_1=\frac{p_0V_0T_1}{V_1T_0},\ \ p_3=\frac{p_0V_0T_3}{V_3T_0}.$$

Следовательно, работа равна

$$A=\frac{p_0V_0}{T_0}\left(\frac{T_3}{V_3}-\frac{T_1}{V_1}\right)(V_3-V_1);\ T_1=273\text{ К},\ T_3=400\text{ К}.$$

Не забудьте перевести литры в кубические метры (1 л $=10^{-3}$ м^3).

Ответ: $A=\frac{p_0V_0}{T_0}\left(\frac{T_3}{V_3}-\frac{T_1}{V_1}\right)(V_3-V_1)$, $A=44$ Дж.

2.23. Изобразим круговой процесс в координатах (p, V) (см. рис. 2.4). Работа за цикл равна $A=(p_3-p_1)(V_3-V_1)$. Выразим объемы V_1 и V_3 из объединенного газового закона для состояний *1* и *3* и для нормальных условий:

$$V_1=\frac{p_0V_0T_1}{p_1T_0},\ \ V_3=\frac{p_0V_0T_3}{p_2T_0}.$$

Следовательно, работа равна

$$A=(p_3-p_1)\frac{p_0V_0}{T_0}\left(\frac{T_3}{p_3}-\frac{T_1}{p_1}\right);\ T_0=273\text{ К},\ T_3=450\text{ К}.$$

К этой задаче можно задать дополнительный вопрос: определите количество вещества, находящегося в этом сосуде. Ответ на него очень прост, если вы помните, что один моль любого газа при нормальных условиях занимает объем $V_0=22{,}4$ л. Если газ занимает объем 10 л, то число молей $\nu=0{,}45$.

Ответ: $A=(p_3-p_1)\frac{p_0V_0}{T_0}\left(\frac{T_3}{p_3}-\frac{T_1}{p_1}\right)$, $A=79$ Дж.

2.24. Из графика (см. рис. 28) видно, что температура в начальном и конечном состояниях этих двух процессов одинакова, следовательно, одинаковы и изменения температуры, и изменения внутренней энергии газа. Запишем первый закон термодинамики для двух процессов.

Процесс ABC: $Q_1=\Delta U+p_2(V_2-V_1)$.

Процесс ADC: $Q_2=\Delta U+p_1(V_2-V_1)$.

Вычтем одно уравнение из другого, получим:

$$Q_1-Q_2=p_2(V_2-V_1)-p_1(V_2-V_1),$$

откуда

$$Q_2=Q_1-(p_2-p_1)(V_2-V_1).$$

Ответ: $Q_2=Q_1-(p_2-p_1)(V_2-V_1)$, $Q_2=3{,}6$ кДж.

2.25. При нагревании газа при постоянном объеме тепло, сообщенное газу, расходуется только на изменение внутренней энергии: $Q=\Delta U=c_Vm\Delta T$, а при нагревании при постоянном давлении — на изменение внутренней энергии и на работу против внешних сил: $Q=\Delta U+A=c_Vm\Delta T+p\Delta V$. Работу газа определим с помощью уравнения Менделеева-Клапейрона: $pV_1=\frac{m}{M}RT_1$, $pV_2=\frac{m}{M}RT_2$, откуда $p\Delta V=\frac{m}{M}R\Delta T$. Таким образом, $Q=c_Vm\Delta T+\frac{m}{M}R\Delta T=m\Delta T\left(c_V+\frac{R}{M}\right)$.

Ответ: $Q=m\Delta T(c_V+R/M)$, $Q=110$ Дж.

2.26. Для вычисления количества теплоты ($Q=c_pm\Delta T$) необходимо знать изменение температуры газа. Запишем выражение для работы при изобарном процессе через изменение температуры газа (см. решение задачи 2.19):

$$A=p\Delta V=\frac{m}{M}R\Delta T, \text{ откуда } \Delta T=\frac{AM}{mR}.$$

Следовательно, $Q=c_p\frac{AM}{R}$.

Ответ: $Q=c_p\frac{AM}{R}$, $Q=1{,}4$ кДж.

2.27. Температура T смеси определяется из уравнения теплового баланса $c_аm_1(T-T_1)=c_вm_2(T_2-T)$, где m_1 и m_2 — массы азота и водорода, $m_1=m_2=m=\rho V$. Давление газа в сосудах после соединения определим из закона Дальтона $p=p_1'+p_2'$, где

p_1' и p_2' — парциальные давления азота и водорода. Их определим из уравнений Менделеева — Клапейрона с учетом того, что после соединения сосудов объемы газов увеличиваются в два раза. Таким образом, давления равны:

$$p_1'=\frac{m}{M_1}\frac{RT}{2V},\quad p_2'=\frac{m}{M_2}\frac{RT}{2V},\quad p=\frac{mRT}{M_1 2V}+\frac{mRT}{M_2 2V}=$$

$$=\frac{m}{V}\frac{RT}{2}\left(\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}\right)=\frac{\rho R}{2}\frac{M_1+M_2}{M_1M_2}\frac{c_аT_1+c_вT_2}{c_а+c_в}.$$

Ответ: $p=\frac{\rho R}{2}\cdot\frac{M_1+M_2}{M_1M_2}\cdot\frac{c_аT_1+c_вT_2}{c_а+c_в}$, $p=7{,}7\cdot10^5$ Па.

2.28. Из уравнения теплового баланса $cm_1(T_1-T)=cm_2\times\times(T-T_2)$ определим температуру, установившуюся после соединения сосудов T:

$$T=\frac{m_1T_1+m_2T_2}{m_1+m_2}.$$

Массы газа в сосудах m_1 и m_2 определим из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$m_1=\frac{p_1V_1}{T_1}\frac{M}{R},\quad m_2=\frac{p_2V_2}{T_2}\frac{M}{R}.$$

Следовательно, $T=T_1T_2\frac{p_1V_1+p_2V_2}{p_1V_1T_2+p_2V_2T_1}$. Давление в сосудах после соединения определим по закону Дальтона $p=p_1'+p_2'$, парциальные давления p_1' и p_2' — по закону Бойля — Мариотта.

$$p_1V_1=p_1'(V_1+V_2),\quad p_2V_2=p_2'(V_1+V_2).$$

Окончательно давление смеси

$$p=\frac{p_1V_1+p_2V_2}{V_1+V_2}.$$

Ответ: $T=T_1T_2\frac{p_1V_1+p_2V_2}{p_1V_1T_2+p_2V_2T_1}$, $T=270$ К; $p=\frac{p_1V_1+p_2V_2}{V_1+V_2}$, $p=1{,}3\cdot10^5$ Па.

2.29. Искомая сила равна $F=(p_1-p_2)S$, где p_1 и p_2 — давления газа в каждой части цилиндра после смещения поршня. Давления определим из объединенного газового закона $\frac{p_0V_0}{T_0}=\frac{p_1(V_0-hS)}{T}=\frac{p_2(V_0+hS)}{T}$, где T — температура газа после совершения над ним работы. При адиабатном процессе работа идет на нагревание газа: $A=2mc_V\Delta T$. Из этого уравнения определим изменение температуры газа

$$\Delta T=\frac{A}{2mc_V},$$

а массу газа выразим из уравнения Менделеева — Клапейрона

$$\frac{p_0V_0}{T_0}=\frac{m}{M}R.$$

Окончательно получим выражение для силы:

$$F=\frac{p_0V_0}{T_0}\left(T_0+\frac{AT_0R}{2p_0V_0Mc_V}\right)S^2\frac{2h}{V_0^2-h^2S^2}=$$

$$=\left(p_0V_0+\frac{AR}{2Mc_V}\right)\frac{2hS^2}{V_0^2-h^2S^2}.$$

Проверим размерность:

$$[F]=\frac{\text{Па}\cdot\text{м}^3+\text{Дж}}{\text{м}}=\text{Н}.$$

Ответ: $F=\left(p_0V_0+\frac{AR}{2Mc_V}\right)\frac{2hS^2}{V_0^2-h^2S^2}$, $F=640$ Н.

2.30. Запишем первый закон термодинамики:

$$Q=A+\Delta U.$$

Работа, совершенная газом, определяется как разность потенциальной энергии пружины:

$$A=\frac{kx_1^2}{2}-\frac{kx_2^2}{2},$$

где x_1 — смещение при давлении p_1, x_2 — смещение при давлении p_2. Поршень при давлениях p_1 и p_2 находится в равновесии, запишем условия равновесия (сумма сил, действующих на поршень, равна нулю):

$$-kx_1+p_1S=0,\ -kx_2+p_2S=0.$$

Заменив x в формуле для работы, получим:

$$A=(p_2^2-p_1^2)S^2/2k.$$

Изменение внутренней энергии одноатомного газа равно $\Delta U=\frac{3}{2}\frac{m}{M}R\Delta T$, где ΔT — изменение температуры $\Delta T=T_2-T_1$. Это изменение определим из уравнений Менделеева — Клапейрона

$$p_1V_1=\frac{m}{M}RT_1,\ p_2V_2=\frac{m}{M}RT_2.$$

Учтем, что объем после нагревания увеличился на $\Delta V=(x_2-x_1)S$. Получим:

$$T_2-T_1=\frac{M}{mR}(p_2-p_1)\left(V_1+p_2\frac{S^2}{k}\right).$$

Следовательно,

$$\Delta U=\frac{3}{2}(p_2-p_1)\left(V_1+p_2\frac{S^2}{k}\right).$$

Окончательно получим:

$$Q=(p_2^2-p_1^2)\frac{S^2}{2k}+\frac{3}{2}(p_2-p_1)\left(V_1+p_2\frac{S^2}{k}\right).$$

Проверим размерность полученного выражения:

$$[Q]=\frac{\text{Па}^2\cdot\text{м}^5}{\text{Н}}+\text{Па}\left(\text{м}^3+\text{Па}\,\frac{\text{м}^5}{\text{Н}}\right)=\text{Па}\cdot\text{м}^3=\text{Н}\cdot\text{м}=\text{Дж}.$$

В этой задаче для ее решения вам понадобились знания из механики, молекулярно-кинетической теории и термодинамики. Только логические рассуждения приводят к правильному решению. Внимательно читайте условия, следуйте правилу: можно вводить сколько угодно неизвестных, лишь бы в конечную формулу они не входили. В данной задаче мы ввели x — смещение поршня, m — массу газа, M — молярную массу, T — температуру. Ответ же получили только через исходные данные задачи!

Ответ: $Q=(p_2^2-p_1^2)\frac{S^2}{2k}+\frac{3}{2}(p_2-p_1)\left(V_1+p_2\frac{S^2}{k}\right)$, $Q=900$ Дж.

2.31. По определению КПД $\eta=\frac{A}{Q_1}$, где A — работа двигателя, Q_1 — количество теплоты, полученное им от нагревателя.

$$Q_1=A+Q,\ \text{откуда}\ A=\frac{\eta Q}{1-\eta}.$$

Ответ: $A=Q\frac{\eta}{1-\eta}$, $A=225$ Дж.

2.32. Так как пар в цилиндре находится под нормальным атмосферным давлением, его температура $T_1=100\,^\circ\text{C}=373$ К. Тепло, выделившееся при конденсации пара, идет на нагревание воды от температуры T до T_1: $rm_{\text{п}}=cm_{\text{в}}(T_1-T)$, где $m_{\text{п}}$ — масса пара, которую определим из уравнения Менделеева — Клапейрона, $m_{\text{п}}=\frac{pVM}{RT_1}$. Таким образом,

$$m_{\text{в}}=\frac{rpVM}{RT_1c\,(T_1-T)}.$$

Удельную теплоту парообразования r и удельную теплоемкость c найдите по таблице.

Проверим размерность:

$$[m]=\frac{\text{Дж}\cdot\text{Па}\cdot\text{м}^3\cdot\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{К}}{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^2\cdot\text{Дж}}=\text{кг}.$$

Ответ: $m_{\text{в}}=\frac{rpVM}{RT_1c\,(T_1-T)}$, $m_{\text{в}}=3{,}2$ кг.

2.33. По закону сохранения энергии $Q=A+Q_k$, где Q_k — количество теплоты, выделившейся при конденсации паров азота, $Q_k=rm$, где r — удельная теплота парообразования азота.

Массу пара найдем из уравнения Менделеева — Клапейрона: $m=\frac{pVM}{RT}=\frac{AM}{RT}$. Здесь $A=p\Delta V=pV$, так как объемом сконденсировавшейся жидкости можно пренебречь. Таким образом, $Q=A\left(1+\frac{rM}{RT}\right)$.

Ответ: $Q=A\left(1+\frac{rM}{RT}\right)$, $Q=1$ кДж.

2.34. Составим уравнение теплового баланса:

$$C(t-t_1)+c_1m_1(t-t_1)=c_2m_2(t_2-t), \qquad (1)$$

где c_2 — удельная теплоемкость меди. Составляя это уравнение, мы фактически записали закон сохранения энергии: количество теплоты, выделившейся при остывании меди, расходуется на нагревание масла и калориметра. Обратите внимание на разницу между понятиями «удельная теплоемкость масла c_1» и «теплоемкость C калориметра»: зная теплоемкость, не надо знать массу! Из уравнения (1) получим:

$$c_1=\frac{c_2m_2(t_2-t)-C(t-t_1)}{m_1(t-t_1)}.$$

Ответ: $c_1=\frac{c_2m_2(t_2-t)-C(t-t_1)}{m_1(t-t_1)}$, $c_1=2{,}18\ \frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$.

2.35. Составим уравнение теплового баланса. В этом случае тепло, выделяющееся при остывании медного тела, идет на парообразование азота: $c_1m_1(t_1-t_2)=rm_2$, где c — удельная теплоемкость меди, r — удельная теплота парообразования азота. Получим:

$$m_2=\frac{c_1m_1(T_1-T_2)}{r}.$$

Ответ: $m_2=\frac{c_1m_1(T_1-T_2)}{r}$, $m_2=42$ г.

2.36. В системе установится равновесие, когда часть воды, кристаллизуясь, превратится в лед, температура смеси при этом будет $t=0\ ^\circ\text{C}$. Составим уравнение теплового баланса $m_2\lambda=m_1c\Delta t$, где λ — удельная теплота плавления льда, c — удельная теплоемкость воды, откуда $m_2=\frac{m_1c(t-t_1)}{\lambda}$. В этой задаче количество теплоты, которая выделяется при кристаллизации воды, идет на ее нагревание до температуры кристаллизации, а эта температура равна $t=0\ ^\circ\text{C}$.

Ответ: $m_2=m_1c(t-t_1)/\lambda$, $m_2=125$ г.

2.37. Количество теплоты, отданной водой при охлаждении до $t=0\ ^\circ\text{C}$, $Q_1=c_1m_1(t_1-t)$, где c_1 — удельная теплоемкость воды, $Q_1=12{,}6$ кДж. Количество теплоты, требуемой для нагревания льда до температуры t, $Q_2=c_2m_2(t-t_2)$, где c_2 — удельная теплоемкость льда, $Q_2=16{,}8$ кДж. Видно, что, для того чтобы нагреть весь лед до 0 °C, тепла не хватает. Недостающее количество теплоты выделится при замерзании воды: $Q_2-Q_1=\lambda m$, где m — масса замерзшей воды, λ — удельная теплота плавления льда; $m=\frac{Q_2-Q_1}{\lambda}=12{,}5$ г. Таким образом, в конечном состоянии при температуре $t=0\ ^\circ\text{C}$ будет лед, масса которого $m_л=m_2+m$, и вода массой $m_в=m_1-m$. Запомните, что в равновесном состоянии лед — вода их общая температура равна 0 °C. Лед не плавится, вода не замерзает!

Ответ: $t=0\ ^\circ\text{C}$, $m_в=m_1-\frac{c_2m_2(t-t_2)-c_1m_1(t_1-t)}{\lambda}$, $m_в=287{,}5$ г.

2.38. При температуре $T=373\ \text{К}=100\ ^\circ\text{C}$ водяной пар над водой, образовавшейся при таянии льда, будет насыщенным и его давление будет $p=10^5$ Па. Массу образовавшегося пара определим из уравнения Менделеева — Клапейрона

$$pV_п=\frac{m_п}{M}RT,$$

где $V_п$ — объем, занимаемый паром, который равен разности объема сосуда и объема воды и меди:

$$V_п=V-\frac{m_1-m_п}{\rho_1}-\frac{m_2}{\rho_2},$$

где ρ_1 — плотность воды, ρ_2 — плотность меди.

Выразим массу пара и составим уравнение теплового баланса:

$$m_п=\frac{p(V\rho_1\rho_2-m_1\rho_2-m_2\rho_1)M}{\rho_2(RT\rho_1-pM)};$$

$$c_2m_2(t_2-t)=\lambda m_1+c_1m_1(t-t_1)+rm_п,$$

где c_1 — удельная теплоемкость воды, c_2 — удельная теплоемкость меди, r — удельная теплота парообразования.

Находим температуру меди:

$$t_2=t+\frac{\lambda m_1}{c_2m_2}+\frac{c_1m_1(t-t_1)}{c_2m_2}+\frac{m_пr}{c_2m_2}.$$

Ответ: $t_2=t+\frac{\lambda m_1+c_1m_1(t-t_1)+m_пr}{c_2m_2}$,

где $m_п=\frac{p(V\rho_1\rho_2-m_1\rho_2-m_2\rho_1)M}{\rho_2(RT\rho_1-pM)}$; $t_2=870\ ^\circ\text{C}$.

2.39. Составим уравнение теплового баланса: $m\lambda+2mc\times$ $\times(t_2-t)=mr+cm(t_1-t_2)$, где $t=0\ ^\circ\text{C}$ — первоначальная температура воды и льда, c — удельная теплоемкость воды, λ — удельная теплота плавления льда, r — удельная теплота парообразования воды.

Из уравнения находим $t_2=\frac{r-\lambda+ct_1}{3c}$, подставляя численные данные, получаем $t_2>100$ °С, следовательно, чтобы расплавить лед и нагреть воду до $t_2=100$ °С, нужно меньшее количество пара. При дальнейшем пропускании пара температура в сосуде изменяться не будет.

При составлении уравнения теплового баланса в этой задаче мы учитывали, что тепло, выделяющееся при конденсации и остывании пара, расходуется на плавление льда и на нагревание воды, получившейся из льда, а также воды, которая раньше была в сосуде. Вот откуда в уравнении теплового баланса слагаемое

$$2mc\,(t_2-t).$$

Ответ: $t_2=100$ °С.

2.40. Количество теплоты, выделяющейся в комнате, складывается из количества теплоты, отобранной от воды и льда, и энергии, потребляемой из сети:
$Q=c_{\text{в}}m\,(t_1-t)+\lambda m+c_{\text{л}}m\,(t-t_2)+N\,\tau$, где $c_{\text{в}}$ — удельная теплоемкость воды, $c_{\text{л}}$ — удельная теплоемкость льда, λ — удельная теплота плавления льда, $t=0$ °С.

Из уравнения теплового баланса находим m:

$$m=\frac{Q-N\tau}{c_{\text{в}}\,(t_1-t)+\lambda+c_{\text{л}}\,(t-t_2)}\,.$$

В этой задаче не забывайте, что вода сначала охлаждается до температуры плавления льда, затем затвердевает и после этого лед, получившийся при затвердевании воды, охлаждается.

Ответ: $m=\dfrac{Q-N\tau}{c_{\text{в}}\,(t_1-t)+\lambda+c_{\text{л}}\,(t-t_2)}$, $m=8{,}9$ г.

2.41. В стационарном состоянии через носик чайника вытекает объем пара $V=Sv\tau$ (рис. 2.5), где τ — время истечения пара. С другой стороны, этот объем пара можно определить из уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$V=\frac{m}{M}\,\frac{RT}{p},$$

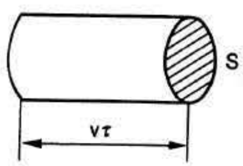


Рис. 2.5

где m — масса воды, выкипевшей за время τ, T — температура кипения воды, $T=373$ К. Массу выкипевшей воды определяем из закона сохранения энергии $N\tau=rm$: $m=\dfrac{N\tau}{r}$, где r — удельная теплота парообразования. Из полученных соотношений находим:

$$v=\frac{V}{S\tau}=\frac{mRT}{MpS\tau}=\frac{N\tau RT}{MpS\tau r};$$

$$v=\frac{NRT}{rMpS}.$$

Проверим размерность:

$$[v]=\frac{\text{Вт}\cdot\text{Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})\cdot\text{К}}{(\text{Дж}/\text{кг})\cdot(\text{кг}/\text{моль})\cdot(\text{Па}\cdot\text{м})^2}=\frac{\text{Вт}}{\text{Па}\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{м}}{\text{с}}\,.$$

Ответ: $v=\dfrac{NRT}{rMpS}$, $v=7{,}6$ *м/с*.

2.42. Давление насыщенных паров в сосуде равно $p=10^5$ Па при температуре $t=100$ °С, $T=373$ К. Количество теплоты, необходимое, чтобы расплавить лед, нагреть воду до $t=100$ °С и превратить часть воды в пар, равно $Q=m\lambda+mc\,(t-t_0)+rm_{\text{п}}$, где λ — удельная теплота плавления льда, c — удельная теплоемкость воды, r — удельная теплота парообразования, $m_{\text{п}}$ — масса пара. Кроме того, $Q=\eta N\tau$. Массу пара определим из уравнения Менделеева — Клапейрона: $m_{\text{п}}=\dfrac{pVM}{RT}$, пренебрегая объемом воды в сосуде. Таким образом, $\eta N\tau=m\lambda+mc\,(t-t_0)+$ $+\dfrac{pVM}{RT}\,r$. Окончательно $\tau=\dfrac{1}{\eta N}\left(m\lambda+mc\,(t-t_0)+\dfrac{pVM}{RT}\,r\right)$.

Проверим размерность:

$$[\tau]=\frac{\text{кг}\cdot(\text{Дж}/\text{кг})+\text{кг}\cdot(\text{Дж}/\text{кг}\cdot\text{К})\cdot\text{К}+\text{Па}\cdot\text{м}^3\ (\text{кг}/\text{моль})\,(\text{Дж}/\text{кг})/(\text{Дж}/\text{моль})}{\text{Дж}/\text{с}}=$$

$$=\frac{\text{Дж}}{\text{Дж}/\text{с}}=\text{с}.$$

Ответ: $\tau=\dfrac{m\lambda+mc\,(t-t_0)+pVMr/RT}{\eta N}$, $\tau=120$ с.

2.43. Поршень будет подниматься, если давление насыщенных паров воды станет равно атмосферному давлению. При давлении $p=10^5$ Па температура кипения воды равна $t=100$ °С. Из закона сохранения энергии $N\tau=mc\,(t-t_0)+m_{\text{п}}r$, где c — удельная теплоемкость воды, r — удельная теплота парообразования, $m_{\text{п}}$ — масса пара, создающего в объеме $V=hS$ давление p. Объем пара определим из уравнения Менделеева — Клапейрона: $V=\dfrac{m_{\text{п}}RT}{Mp}$.

Таким образом,

$$hS=\frac{(N\tau-mc\,(t-t_0))\,RT}{rMp},$$

$$h=\frac{(N\tau-mc\,(t-t_0))\,RT}{rMpS}.$$

Ответ: $h=\dfrac{(N\tau-mc\,(t-t_0))\,RT}{rMpS}$, $h=2{,}5$ м.

2.44. Поршень поднимается на высоту h за счет работы, которую совершает водяной пар: $h=\dfrac{\Delta V}{S}$, где ΔV — объем пара, получившегося при испарении части воды. ΔV определим из уравнения Менделеева — Клапейрона: $\Delta V = \frac{m_п RT}{Mp}$, где $m_п$ — масса пара, $T = 100\,°C = 373$ K — температура насыщенного пара при нормальном атмосферном давлении ($p = 10^5$ Па). Массу пара находим из уравнения теплового баланса $m_2 c_2 (t_2 - t) = m_1 c_1 (t - t_1) + m_п r$, где c_2 — удельная теплоемкость железа, c_1 — удельная теплоемкость воды, r — удельная теплота парообразования.

Окончательно

$$h = \frac{m_2 c_2 (t_2 - t) - m_1 c_1 (t - t_1)}{rMpS} RT.$$

Проверим размерность:

$$[h] = \frac{\text{Дж}\cdot(\text{Дж/моль}\cdot\text{К})\cdot\text{К}}{(\text{Дж/кг})\cdot(\text{кг/моль})\cdot\text{Па}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{Па}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н}} = \text{м}.$$

Ответ: $h = \frac{(m_2 c_2 (t_2 - t) - m_1 c_1 (t - t_1))\, RT}{rMpS}$, $h = 0{,}63$ м.

2.45. Количество теплоты, выделившейся в трущихся поверхностях, равно изменению кинетической энергии. Вагонетка остановилась, следовательно, изменение энергии равно первоначальной кинетической энергии вагонетки: $Q = \frac{mv^2}{2}$.

Ответ: $Q = \frac{mv^2}{2}$, $Q = 62{,}5$ Дж.

2.46. Силы сопротивления совершают отрицательную работу, тепло идет на нагревание капли: $F_c v\tau = cm\Delta t$, где m — масса капли, $m = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$, c — удельная теплоемкость воды, ρ — плотность воды. При равномерном движении сила сопротивления равна силе тяжести: $F_c = mg$. Поэтому $\Delta t = \frac{F_c v\tau}{mc} = \frac{gv\tau}{c}$. Скорость капли определим из равенства $0{,}24\pi R^2 v^2 = mg$.

Окончательно $\Delta t = \frac{g\tau}{0{,}3c}\sqrt{\frac{\rho g R}{2}}$.

Ответ: $\Delta t = \frac{g\tau}{0{,}3c}\sqrt{\frac{\rho g R}{2}}$, $\Delta t = 0{,}25$ °C, $\Delta t = 0{,}25$ K.

2.47. Скорость пули после вылета ее из доски определим из закона сохранения полной энергии — изменение кинетической энергии пули равно количеству теплоты, идущей на нагревание:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = cm\Delta T.$$

Мы пренебрегаем изменением потенциальной энергии пули за время пролета через доску.

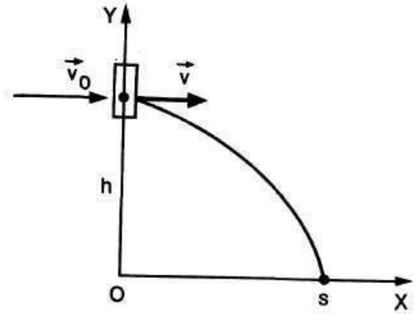


Рис. 2.6

Из уравнения находим скорость вылета. Дальнейшее решение сводится к решению задачи на движение тела, брошенного горизонтально (см. задачи 1.4, 1.5). Это видно из рисунка 2.6.

Движение вдоль оси OX равномерное: $s = vt$.

Движение вдоль оси OY равноускоренное: $h = gt^2/2$.

Окончательно

$$s = \sqrt{\frac{2h\,(v_0^2 - 2c\Delta T)}{g}}.$$

Ответ: $s = \sqrt{\frac{2h}{g}(v_0^2 - 2c\Delta T)}$, $s = 284$ м.

2.48. По закону сохранения энергии (см. задачу 2.47)

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)\, v^2}{2} + c\,(m_1 + m_2)\,\Delta T. \qquad (1)$$

В результате абсолютно неупругого удара тела после удара движутся вместе (см. задачи 1.53, 1.63). Запишем уравнение закона сохранения импульса:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_2 + m_1)\, v, \qquad (2)$$

где v — скорость тел после удара.

Решая уравнения (1) и (2), получим:

$$\Delta T = \frac{(m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - (m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{c\,(m_1 + m_2)^2}.$$

После упрощений получим:

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2 (v_2 - v_1)^2}{(m_1 + m_2)^2\, c}.$$

Проверим размерность:

$$[\Delta T] = \frac{\text{кг}^2\cdot(\text{м/с})^2\cdot\text{кг}\cdot\text{К}}{\text{кг}^2\cdot\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})} = \frac{(\text{м/с})^2\cdot\text{кг}\cdot\text{К}}{\text{кг}\cdot(\text{м/с})^2} = \text{К}.$$

Ответ: $\Delta T=\dfrac{m_1m_2(v_2-v_1)^2}{(m_1+m_2)^2c}$, $\Delta T=1{,}8\cdot10^{-3}$ К.

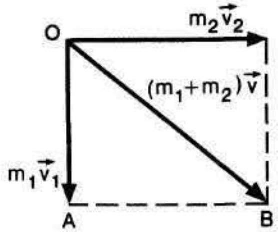


Рис. 2.7

2.49. Запишем закон сохранения импульса для неупругого удара в векторной форме:

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=(m_1+m_2)\vec{v}.$$

Из треугольника OAB (рис. 2.7), используя теорему Пифагора, запишем:

$$(m_1+m_2)v=\sqrt{(m_1v_1)^2+(m_2v_2)^2}. \qquad (1)$$

Закон сохранения энергии для неупругого удара запишем в виде

$$\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}=\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}+Q, \qquad (2)$$

где Q — энергия деформации, которая идет на нагревание:

$$Q=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}-\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}. \qquad (3)$$

Подставим (1) и (3), получим:

$$Q=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}-\frac{(m_1+m_2)}{2}\frac{(m_1v_1)^2+(m_2v_2)^2}{(m_1+m_2)^2}.$$

Количество теплоты, идущей на нагревание, запишем: $Q=c(m_1+m_2)\Delta T$. Мы предположили, что начальные температуры тел одинаковы. Преобразуя полученные соотношения, получим:

$$c(m_1+m_2)\Delta T=\frac{m_1m_2(v_1^2+v_2^2)}{2(m_1+m_2)},$$

откуда $\Delta T=\dfrac{m_1m_2(v_1^2+v_2^2)}{2(m_1+m_2)^2c}$.

Проверим размерность:

$$[\Delta T]=\frac{\text{кг}^2\cdot(\text{м/с})^2}{\text{кг}^2\cdot\text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}}=\frac{(\text{м/с})^2\cdot\text{кг}\cdot\text{К}}{\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2}=\text{К}.$$

Ответ: $\Delta T=\dfrac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)^2}\dfrac{v_1^2+v_2^2}{c}$, $\Delta T=2{,}4\cdot10^{-2}$ К.

2.50. Каждый удар — неупругое соударение, так как молоток и гвоздь некоторое время после удара движутся вместе. Закон сохранения импульса: $m_2v_2=(m_1+m_2)v$. Закон сохранения энергии с учетом тепла, идущего на нагревание:

$$\frac{m_2v_2^2}{2}=\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}+Q;\quad Q=\frac{m_2v_2^2}{2}\frac{m_1}{m_1+m_2},$$

$$nQ=cm_1\Delta T,\ \text{где } n \text{ — число ударов.}$$

$$\Delta T=\frac{nm_2v_2^2}{2m_2(m_1+m_2)c},\ \text{где } v_2=\frac{p}{m_2}.$$

Размерность проверяется так же, как и в предыдущей задаче.

Ответ: $\Delta T=\dfrac{np^2}{2m_2(m_1+m_2)c}$, $\Delta T=8{,}5$ К.

2.51. Рабочий прикладывает к воротку пару сил, каждая из которых равна F. Работа, произведенная им за один оборот воротка, $A=2F\pi d=2\pi M$. Чтобы нарезать резьбу по всей длине l, нужно сделать n оборотов, $n=\dfrac{l}{h}$. Полная работа

$$A=2\pi M\frac{l}{h}.$$

На нагревание идет количество теплоты $Q=\eta A$. Поэтому $cm\Delta T=\eta\dfrac{2\pi Ml}{h}$. Массу стальной шпильки определим через ее плотность $m=\rho l\dfrac{\pi d^2}{4}$. Таким образом,

$$\rho l\frac{\pi d^2}{4}c\Delta T=\eta\frac{2\pi Ml}{h},$$

откуда

$$\Delta T=\frac{8M\eta}{c\rho d^2h}.$$

Для решения этой задачи мы вводили очень большое число неизвестных: и силу, и число оборотов, и длину шпильки; вспоминали определение работы, определение КПД, определение количества теплоты, необходимой на нагревание, связь массы с объемом, а также вспомнили, чему равен объем цилиндра. Главное, логически шли к определению необходимой величины. В результате в ответ входят только исходные данные, все промежуточные введенные нами неизвестные сократились.

Ответ: $\Delta T=\dfrac{8M\eta}{c\rho hd^2}$, $\Delta T=38$ К.

2.52. В тепло переходит работа силы трения. Эта работа определяется как работа постоянной силы $A=Fs\cos\alpha$, где α — угол между силой и перемещением. В каждый момент времени сила и перемещение направлены по касательной, следовательно, $\alpha=0$, $\cos\alpha=1$. Работа силы трения определится как $A=F_{\text{тр}}2\pi l\sin\alpha\frac{\omega t}{2\pi}$, где $\frac{\omega t}{2\pi}$ — число оборотов штанги за время t. Силу трения определим из законов динамики. Рассмотрим силы, действующие на шайбу (рис. 2.8): $\vec{N}$ — сила реакции опоры, $\vec{T}$ — сила реакции штанги. Сила трения на рисунке не показана, так как она перпендикулярна плоскости чертежа. Уравнение второго закона Ньютона запишем в следующем виде:

$$m\vec{g}+\vec{N}+\vec{T}+\vec{F}_{\text{тр}}=m\vec{a},$$

здесь $a=\omega^2R$ — центростремительное ускорение.
Спроектируем силы на оси OX и OY, получим:

$$T\sin\alpha=m\omega^2R,\ R=l\sin\alpha, \tag{1}$$

$$N+T\cos\alpha-mg=0.$$

Сила трения равна $F_{\text{тр}}=\mu N$, N определим из уравнений (1). Тогда работа этой силы равна $\mu m(g-\omega^2\cos\alpha\cdot l)\,l\sin\alpha\cdot\omega t$. Работа полностью переходит в тепло, которое идет на нагревание, поэтому

$$cm\Delta T=\mu m(g-\omega^2l\cos\alpha)\,l\omega t\sin\alpha,$$

откуда находим:

$$\Delta T=\frac{1}{c}\mu(g-\omega^2l\cos\alpha)\,l\omega t\sin\alpha.$$

Проверим размерность:

$$[\Delta T]=\frac{\text{м/с}^2\cdot\text{м}\cdot(1/\text{с})\cdot\text{с}}{\text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}}=\frac{\text{кг}\cdot\text{К}\cdot\text{с}^2\cdot\text{м}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^2}=\text{К}.$$

Ответ: $\Delta T=\frac{1}{c}\mu(g-\omega^2l\cos\alpha)\,l\omega t\sin\alpha$, $\Delta T=0{,}16$ К.

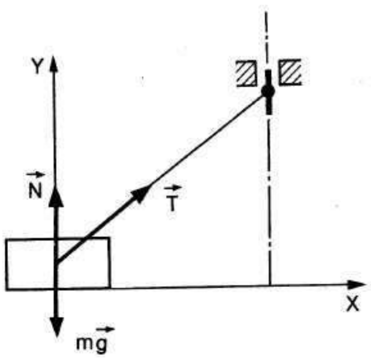


Рис. 2.8

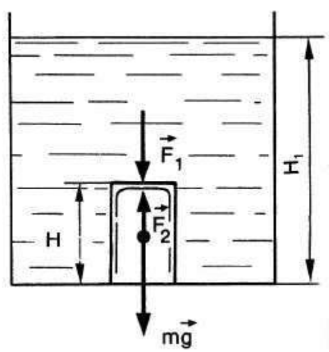


Рис. 2.9

2.53. Для решения этой задачи необходимо опять обратиться к законам механики. Силы, действующие на стакан в тот момент, когда он начинает всплывать, показаны на рисунке 2.9. Сила реакции дна обращается в нуль. $\vec{F}_1$ — сила давления воды на дно стакана; ее значение определим, вспомнив связь давления и силы давления $F=pS$. Давление на дно оказывает как столб воды высотой H_1-H, так и атмосфера. Получим:

$$F_1=[p_0+\rho g(H_1-H)]S, \tag{1}$$

где p_0 — атмосферное давление, ρ — плотность воды, $S=\pi d^2/4$. $m\vec{g}$ — сила тяжести, массу воздуха в стакане не учитываем. $\vec{F}_2$ — сила давления воздуха, находящегося в стакане:

$$F_2=pS. \tag{2}$$

Для всплытия необходимо выполнение условия $F_2\geqslant F_1+mg$. Мы же рассмотрим условие равновесия $\vec{F}_1+\vec{F}_2+m\vec{g}=0$, или в проекции на вертикальную ось

$$F_1-F_2+mg=0. \tag{3}$$

Нагревание происходит при постоянном объеме, поэтому воспользуемся законом изохорного процесса

$$\frac{p}{T}=\frac{p_0}{T_0},\ T=T+\Delta T,$$

$$p=p_0\frac{T_0+\Delta T}{T_0}. \tag{4}$$

Подставим в (3) соотношения (1), (2) и (4), получим:

$$\rho g(H_1-H)S-p_0\frac{T_0+\Delta T}{T_0}S+mg=0.$$

После преобразований определим:

$$\Delta T=T_0\frac{[\rho(H_1-H)+4m/\pi d^2]\,g}{p_0}.$$

В этой задаче можно не производить проверку размерности, так как ясно видно, что, кроме давления и в числителе и в знаменателе, в формулу входит только температура.

Ответ: $\Delta T=T_0\frac{g}{p_0}[\rho(H_1-H)+4m/\pi d^2]$,

$\Delta T=5{,}5$ К.

III. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

3.1. По закону Кулона $F=k\frac{q_1q_2}{\varepsilon r^2}$. Для равенства сил при увеличении одного из зарядов в 4 раза надо увеличить расстояние между зарядами в 2 раза или поместить заряды в другую диэлектрическую среду, диэлектрическая проницаемость которой больше в 4 раза.

Ответ: $r_1=2r$, $\varepsilon_2=4\varepsilon_1$.

3.2. До погружения в жидкость на каждый из шариков действует сила реакции нити T_1, сила кулоновского отталкивания со стороны другого шарика $F=k\frac{Qq}{4l^2\sin^2\alpha}$, где Q и q — заряды шариков, l — длина нитей, а также сила тяжести mg (рис. 3.1, *а*). При равновесии шариков $T_1\cos\alpha=mg$, $T_1\sin\alpha=F$. Исключая T_1, находим, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{kQq}{4l^2mg\sin^2\alpha}. \qquad (1)$$

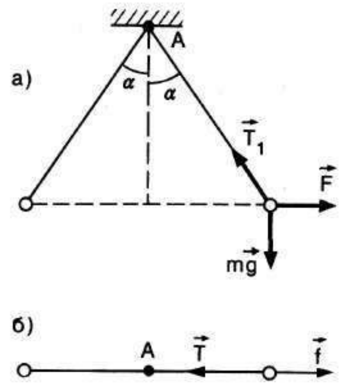


Рис. 3.1

При погружении в жидкость на шарик действуют две силы: сила кулоновского отталкивания $f=k\frac{Qq}{\varepsilon 4l^2}$ и сила реакции нити T. Сила тяжести уравновешивается выталкивающей силой, так как плотности материала шариков и жидкости одинаковы. Это означает, что силы $\vec{T}$ и $\vec{f}$ должны действовать вдоль одной прямой, т. е. обе нити вытягиваются вдоль этой прямой (рис. 3.1, *б*). Таким образом,

$$T=f=k\frac{Qq}{\varepsilon 4l^2}. \qquad (2)$$

Выражая Qq из (1) и подставляя в (2), находим окончательно:

$$T=\frac{mg}{\varepsilon}\sin^2\alpha\operatorname{tg}\alpha.$$

Ответ: $T=\frac{mg}{\varepsilon}\sin^2\alpha\operatorname{tg}\alpha$, $T=3{,}5\cdot10^{-4}$ Н.

3.3. Из условий симметрии следует, что заряд q нужно поме-

стить в центр треугольника, его знак должен быть противоположен знаку зарядов Q. На каждый из зарядов Q действуют по две силы $F=k\frac{Q^2}{a^2}$ кулоновского отталкивания со стороны двух других зарядов и сила притяжения со стороны заряда q, $f=k\frac{Qq}{r^2}$, где $r=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ (рис. 3.2), поэтому $f=k\frac{3Qq}{a^2}$. Заряд Q находится в равновесии, поэтому $f=2F\cos 30°=F\sqrt{3}$. Используя закон Кулона, получим $q=\frac{Q}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $q=-\frac{Q}{\sqrt{3}}$. На заряд q действуют три одинаковые силы притяжения к зарядам Q, равные f и направленные под углом 120° друг к другу. Сумма этих сил равна нулю, поэтому заряд q также находится в равновесии. Равновесие неустойчивое: при смещении заряда q к одному из зарядов Q возрастает сила взаимодействия этих зарядов, силы F при этом не изменяются, заряд Q начнет двигаться к заряду q, т. е. система еще дальше будет отклоняться от равновесия.

Ответ: $q=-Q/\sqrt{3}$, заряд q надо поместить в центр треугольника, равновесие неустойчивое.

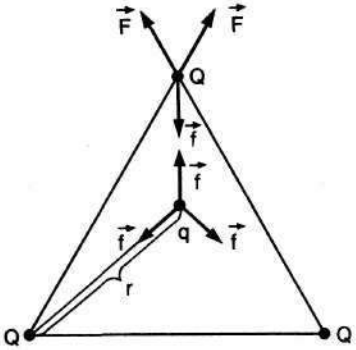


Рис. 3.2

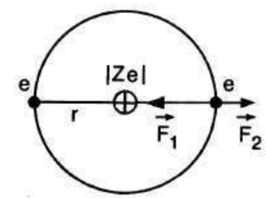


Рис. 3.3

3.4. Силы, действующие на электрон, показаны на рисунке 3.3. Сила кулоновского взаимодействия электрона с ядром $F_1=k\frac{Ze^2}{r^2}$, где $Z=2$. Сила кулоновского взаимодействия электрона с другим электроном $F_2=k\frac{e^2}{4r^2}$. Мы рассмотрели силы, действующие только на один из электронов, так как они симметричны относительно ядра, а следовательно, и относительно взаимодействий.

Эти силы создают центростремительное ускорение при движении электрона на орбите. Запишем уравнение второго закона Ньютона:

$$F_1-F_2=m\frac{v^2}{r};\ \frac{kZe^2}{r^2}-\frac{ke^2}{4r^2}=\frac{mv^2}{r}.$$

Получим $v=\frac{e}{2}\sqrt{\frac{k(4Z-1)}{mr}}$.

Проверим размерность:

$$[v]=\text{Кл}\cdot\left(\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{м}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $v=\frac{e}{2}\sqrt{\frac{k(4Z-1)}{mr}}$, $v=3{,}8\cdot10^6$ м/с.

3.5. Рассмотрим силы, действующие на один из зарядов q; так как они расположены симметрично относительно заряда Q, то можно выбирать любой. Силы эти показаны на рисунке 3.4. По второму закону Ньютона $\vec{F}_1+\vec{F}_1+\vec{F}=m\vec{a}_1$, $F=k\frac{3qQ}{a^2}$; $F_1=\frac{kq^2}{a^2}$, где $a_1=\omega^2R$ — центростремительное ускорение, a — сторона треугольника. Проекция сил на ось OY дает:

$$F-2F_1\cos30°=m\omega^2R,$$
$$R=\frac{a}{\sqrt{3}},$$

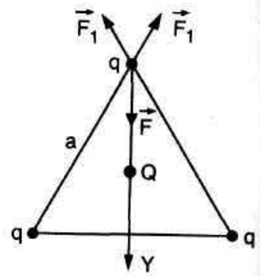


Рис. 3.4

где R — радиус вращения. Окончательно получим:

$$\omega=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{3kq(\sqrt{3}\,Q-q)}{ma}}.$$

Использование условий в расположении зарядов нам помогает решить задачу!

Ответ: $\omega=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{3kq(\sqrt{3}\,Q-q)}{ma}}$, $\omega=0{,}62$ с$^{-1}$.

3.6. Силы, действующие на каждый из шариков, показаны на рисунке 3.5. Из второго закона Ньютона для шарика следует: $T\sin\alpha-F=m\omega^2R$, $T\cos\alpha=mg$, где T — сила реакции нити, F — сила кулоновского отталкивания,

$$F=2F_1\cos30°=\sqrt{3},\ F_1=\sqrt{3}\,k\frac{Q^2}{a^2},$$

где a — расстояние между шариками, $a=\frac{h}{\cos30°}=\frac{2h}{\sqrt{3}}$, где h — высота правильного треугольника, в вершинах которого расположены шарики. Из рисунка 3.5 видно, что $\frac{2}{3}h=l\sin\alpha$, тогда

$a=\sqrt{3}\,l\sin\alpha$ и $F_1=k\frac{Q^2}{3l^2\sin^2\alpha}$. Окончательно масса находится из уравнения второго закона Ньютона с учетом приведенных выражений:

$$m=\frac{kQ^2\cos\alpha}{\sqrt{3}\,l^2(g-\omega^2l\cos\alpha)\sin^3\alpha}.$$

Ответ: $m=\frac{kQ^2\cos\alpha}{\sqrt{3}\,l^2(g-\omega^2l\cos\alpha)\sin^3\alpha}$, $m=4\cdot10^{-5}$ кг.

$\sin\alpha=\frac{2}{3}\frac{h}{l}$

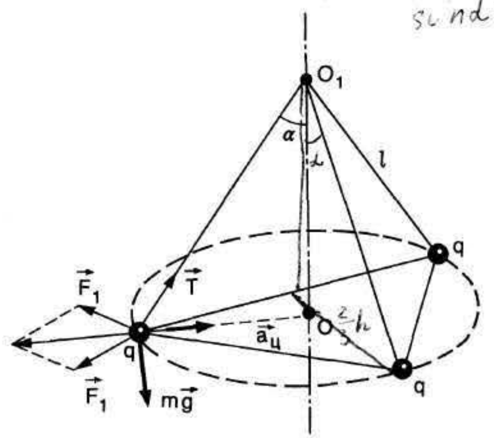


Рис. 3.5

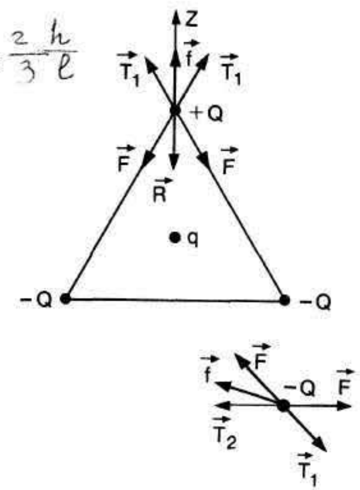


Рис. 3.6

3.7. Силы, действующие на заряды, показаны на рисунке 3.6. На заряды, расположенные в вершинах, действуют одинаковые силы $f=k\frac{Qq}{r^2}$, где $r=\frac{2}{3}h=a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $f=3k\frac{Qq}{a^2}$. Равнодействующая этих трех сил направлена в положительном направлении оси Z. Уравновешивающая сила R должна быть направлена в противоположном направлении и равна $R=f+2f\sin\alpha$. Рассмотрим силы, действующие на заряд $+Q$: силы кулоновского взаимодействия зарядов $+Q$ и $-Q$, силы реакции стержней T_1, силы f и R. Сумма сил, действующих на заряд $+Q$, равна нулю: $f+2T_1\cos30°-R-2F\cos30°=0$. Из этого уравнения с учетом того, что $R=2f$, получаем $T_1==\frac{1}{\sqrt{3}}(f+F\sqrt{3})$. Рассмотрим силы, действующие на заряд $-Q$. Найдем сумму проекций сил на прямую, соединяющую одноименные заряды:

$T_2+f\cos30°+F\cos60°-F-T_1\cos60°=0$. С учетом того, что

$T_2=0$ (по условию), получаем $f=F\sqrt{3}$. Подставляя выражения для f и F, найденные ранее, находим $q=\frac{Q}{\sqrt{3}}$. Подставляя q в формулы для R, T_1, f, получим:

$$R=2\sqrt{3}\,\frac{kQ^2}{a^2},\quad T_1=2F=2k\,\frac{Q^2}{a^2}.$$

Так как в отсутствие заряда q силы натяжения всех стержней одинаковы и равны F, то при внесении заряда q сила натяжения стержней, соединяющих разноименные заряды, удвоилась. Вычислим силу R: $R=7{,}8\cdot10^{-5}$ Н, сила направлена к заряду q. Вычислим заряд q: $q=5{,}8\cdot10^{-9}$ Кл.

Ответ: $R=2\sqrt{3}\,\frac{kQ^2}{a^2}$, $R=7{,}8\cdot10^{-5}$ Н, направлена к заряду q;

$$q=Q/\sqrt{3},\quad q=5{,}8\ \text{нКл};$$

$$\Delta T=2k\,\frac{Q^2}{a^2},\quad \Delta T=4{,}5\cdot10^{-5}\ \text{Н}.$$

3.8. Так как $Q\gg q$, то взаимодействием между элементами кольца можно пренебречь. Выделим малый элемент кольца длиной $R\alpha$ (рис.3.7, *а*). Со стороны заряда Q на него действует сила $F=k\,\frac{Q\Delta q}{R^2}$, где $\Delta q=\frac{q\alpha}{2\pi}$. Из условия равновесия (рис. 3.7, *б*) имеем $F=2T\sin\frac{\alpha}{2}\approx T\alpha$ с учетом малости угла $(\sin\frac{\alpha}{2}\approx\frac{\alpha}{2})$. Отсюда $T=\frac{F}{\alpha}=k\,\frac{Q\Delta q}{\alpha R^2}=k\,\frac{Qq}{2\pi R^2}$.

Ответ: $T=k\,\frac{Qq}{2\pi R^2}$.

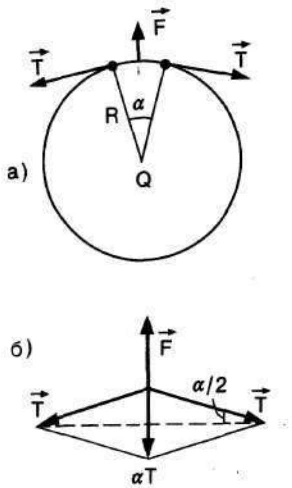


Рис. 3.7

3.9. Работа электростатического поля при перемещении заряда q из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2 равна $A_1=q(\varphi_1-\varphi_2)$, $A_1=10^{-5}$ Дж.
Во втором случае работа совершается против сил электростатического поля: $A_2=q(\varphi_3-\varphi_4)$, $A_2=-10^{-5}$ Дж.

Ответ: $A_1=q(\varphi_1-\varphi_2)$, $A_1=10^{-5}$ Дж;
$A_2=q(\varphi_3-\varphi_4)$, $A_2=-10^{-5}$ Дж.

3.10. Работа равна разности потенциальных энергий зарядов, расположенных в вершинах квадрата, и зарядов в бесконечности. Потенциальная энергия зарядов в бесконечности равна нулю. Работа по перенесению заряда q в точку поля, созданного одним из зарядов, равна $A_1=k\,\frac{q^2}{a}=q\varphi_1$. Работа по перенесению заряда q в точку поля, созданного двумя зарядами, равна $A_2=k\,\frac{q^2}{a}+k\,\frac{q^2}{a\sqrt{2}}$. Работа по перенесению заряда q в точку поля, созданного тремя зарядами, равна $A_3=2k\,\frac{q^2}{a}+k\,\frac{q^2}{a\sqrt{2}}$. Полная работа $A=k\,\frac{q^2}{a}(4+\sqrt{2})$.

Ответ: $A=k\,\frac{q^2}{a}(4+\sqrt{2})$, $A=4{,}9\cdot10^{-5}$ Дж.

3.11. Протон и α-частица — это положительно заряженные частицы. Масса α-частицы в 4 раза больше массы протона: $m_\alpha=4m_p$. Заряд α-частицы в 2 раза больше заряда протона: $q_\alpha=2q_p$. Заряд протона по модулю равен заряду электрона.

Посмотрим, что происходит с этими частицами. На большом расстоянии можно пренебрегать действием электростатического поля одной частицы на другую. Но при приближении их скорости уменьшаются, так как появляются силы отталкивания. Обе частицы положительно заряжены. В момент наибольшего сближения их скорости становятся одинаковыми — в этот момент они покоятся относительно друг друга! Запишем закон сохранения импульса: $m_\alpha v_2-m_p v_1=(m_\alpha+m_p)\,v$, где v — скорость частиц в момент их наибольшего сближения. По закону сохранения энергии

$$\frac{m_\alpha v_2^2}{2}+\frac{m_p v_1^2}{2}=\frac{m_\alpha v^2}{2}+\frac{m_p v^2}{2}+k\,\frac{2e^2}{a}.$$

Последнее слагаемое учитывает взаимодействие заряженного тела в поле другого, a — наименьшее расстояние между частицами. Определим v из первого уравнения и подставим во второе. Затем определим a:

$$a=\frac{4ke^2(m_\alpha+m_p)}{m_\alpha m_p(v_1+v_2)^2}=\frac{5ke^2}{m_p(v_1+v_2)^2}.$$

Проверим размерность:

$$[a]=\frac{(\text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2)\cdot\text{Кл}^2}{\text{кг}\cdot(\text{м/с})^2}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}=\text{м}.$$

Ответ: $a=\frac{5ke^2}{m_p(v_1+v_2)^2}$, $a=4\cdot10^{-12}$ м.

3.12. По закону сохранения энергии $\frac{m_pv_p^2}{2}+\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}+k\frac{eq_\alpha}{2a}=$ $=k\frac{eq_\alpha}{a}$. По закону сохранения импульса $m_pv_p=m_\alpha v_\alpha$. Заряд α-частицы $q_\alpha=2e$, а ее масса $m_\alpha=4m_p$. Решая эти два уравнения, находим скорости протона и α-частицы:

$$v_\alpha=\frac{\sqrt{k}\,e}{\sqrt{10am_p}},\quad v_p=\frac{4\sqrt{k}\,e}{\sqrt{10am_p}}.$$

Проверим размерность:

$$[v]=\frac{(\text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2)^{1/2}\cdot\text{Кл}}{(\text{м.кг})^{1/2}}=\left(\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^3}{\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{с}^2}\right)^{1/2}=\text{м/с}.$$

Ответ: $v_\alpha=\frac{\sqrt{k}\,e}{\sqrt{10am_p}}$, $v_\alpha=3{,}7\cdot10^3$ м/с;

$v_p=\frac{4\sqrt{k}\,e}{\sqrt{10am_p}}$, $v_p=1{,}5\cdot10^4$ м/с.

3.13. Равнодействующие сил, действующих на каждый из шариков, одинаковы по величине и направлены от центра треугольника вдоль его биссектрис. Поэтому заряды будут двигаться с одинаковыми ускорениями, за одно время приобретут одинаковые скорости и пройдут одинаковые расстояния. По закону сохранения энергии

$$3\frac{mv^2}{2}=E_0-E.$$

В первый момент времени потенциальная энергия взаимодействия зарядов $E_0=3k\frac{q^2}{a}$. Когда расстояние между ними удвоится, энергия будет $E=\frac{E_0}{2}$. Подставляя значения E_0 и E в закон сохранения энергии, находим скорости зарядов:

$$v=q\sqrt{\frac{k}{ma}}.$$

Ответ: $v=q\sqrt{\frac{k}{ma}}$, $v=0{,}04$ м/с.

3.14. Равнодействующие сил, действующих на каждый из зарядов, одинаковы и направлены от центра квадрата вдоль его диагоналей. Ускорения зарядов, их скорости и расстояния от

центра квадрата будут одинаковы. По закону сохранения энергии $4\frac{mv^2}{2}=E_0-E$, где $E_0=E_{012}+E_{013}+E_{014}+E_{023}+E_{024}+E_{034}$ — потенциальная энергия взаимодействия зарядов в начальный момент времени; $E_{014}=E_{012}=E_{023}=E_{034}=k\frac{q^2}{a}$, $E_{013}=E_{024}=k\frac{q^2}{a\sqrt{2}}$.

Складывая, находим, что $E_0=(4+\sqrt{2})\frac{kq^2}{a}$. Когда расстояние между зарядами удвоится, энергия их взаимодействия будет $E=\frac{E_0}{2}$. Находим скорость, подставив E_0 и E в закон сохранения энергии: $v=\frac{q}{2}\sqrt{\frac{k(4+\sqrt{2})}{ma}}$.

Ответ: $v=\frac{q}{2}\sqrt{\frac{k(4+\sqrt{2})}{ma}}$, $v=0{,}02$ м/с.

3.15. Потенциал шара в вакууме $\varphi_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, где r — радиус шара. Его заряд $q=4\pi\varepsilon_0 r\varphi$. После соединения оболочки с землей на ней останется заряд, равный по величине и противоположный по знаку заряду шара, $Q=-q$, а потенциал оболочки $\varphi_R=0$. Потенциал шара с учетом потенциала поля, созданного зарядом оболочки, равен

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\varphi_0\left(1-\frac{r}{R}\right).$$

Ответ: $\varphi=\varphi_0(1-r/R)$, $\varphi=200$ В; $\varphi_R=0$.

3.16. До внесения шарика внутрь сферы заряды на шариках можно найти из уравнений $k\frac{q_1}{r_1}=k\frac{q_2}{r_2}$, $q_1+q_2=Q$,

$$q_1=Q\frac{r_1}{r_1+r_2},\quad q_2=Q\frac{r_2}{r_1+r_2}.$$

После окружения шарика заземленной сферой его потенциал уменьшается, так как на сфере наводится заряд, равный по величине и противоположный по знаку заряду шарика. На шарик радиусом r_1 будет перетекать заряд с шарика радиусом r_2 до тех пор, пока потенциалы шариков не сравняются. Потенциал шарика радиусом r_2

$$\varphi_2=k\frac{q_2'}{r_2},\tag{1}$$

а шарика радиусом r_1

$$\varphi_1=k\frac{q_1'}{r_1}-k\frac{q_1'}{R}=kq_1'\frac{R-r_1}{Rr_1}.\tag{2}$$

По закону сохранения заряда

$$Q = q_1' + q_2'. \qquad (3)$$

Решая совместно уравнения (1), (2) и (3), находим:

$$q_1' = Q\frac{r_1R}{r_2R + r_1R - r_1r_2}, \quad q_2' = Q\frac{r_2(R - r_1)}{r_2R + r_1R - r_1r_2}.$$

Заряд, прошедший по проводнику,

$$\Delta q = q_1' - q_1 = q_2 - q_2'.$$

Окончательно получаем:

$$\Delta q = Q\frac{r_1^2r_2}{(r_1 + r_2)(r_2R + r_1R - r_1r_2)}.$$

Ответ: $\Delta q = Q\dfrac{r_1^2r_2}{(r_1 + r_2)(r_2R + r_1R - r_1r_2)}$,
$\Delta q = 2$ нКл.

3.17. Пусть q — заряд одного шарика, тогда заряд другого $-q$. Потенциал первого $\varphi_1 = k\frac{q}{r} - k\frac{q}{l}$, второго $\varphi_2 = -k\frac{q}{r} + k\frac{q}{l}$. Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = 2kq\frac{l - r}{lr}$. Емкость конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{lr}{2k(l - r)}.$$

Ответ: $C = \dfrac{lr}{2k(l - r)}$, $C = 1{,}2$ пФ.

3.18. Начертим эквивалентную схему (рис. 3.8). Из симметрии ясно, что на конденсаторе емкостью C_0 заряда нет, так как

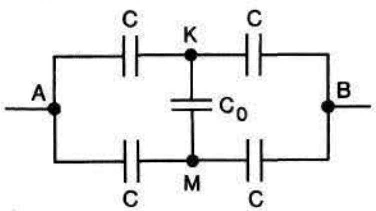


Рис. 3.8

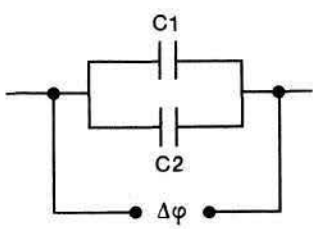


Рис. 3.9

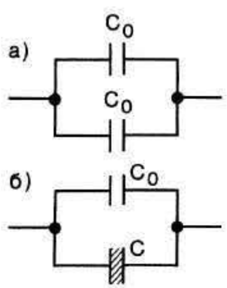


Рис. 3.10

потенциалы точек K и M равны. Тогда емкость всей батареи равна C, а заряд $q = CU$.

Ответ: $q = CU$, $q = 20$ мКл.

3.19. Схема соединения конденсаторов показана на рисунке 3.9. Заряд на первом конденсаторе $q_1 = C_1\Delta\varphi_1$. Заряд на втором конденсаторе $q_2 = C_2\Delta\varphi_2$. После соединения конденсаторов общий заряд $q = q_1 + q_2$, общая емкость $C = C_1 + C_2$. Разность потенциалов $\Delta\varphi = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2}$. Окончательно

$$\Delta\varphi = \frac{C_1\Delta\varphi_1 + C_2\Delta\varphi_2}{C_1 + C_2}.$$

Ответ: $\Delta\varphi = \dfrac{C_1\Delta\varphi_1 + C_2\Delta\varphi_2}{C_1 + C_2}$, $\Delta\varphi = 40$ В.

3.20. Схемы соединения конденсаторов при зарядке (*а*) и после внесения диэлектрика (*б*) приведены на рисунке 3.10. Так как конденсаторы отсоединены от источника, их полный заряд не изменяется:

$$q = q_1 + q_2 = 2C_0U_0.$$

Емкость конденсатора, заполненного диэлектриком, $C = \varepsilon C_0$. Заряды на конденсаторах распределяются пропорционально емкостям: $\frac{q_1}{\varepsilon C_0} = \frac{q_2}{C_0}$. Из этих уравнений находим $q_1 = \frac{2\varepsilon C_0U_0}{1 + \varepsilon}$, $q_2 = \frac{2C_0U_0}{1 + \varepsilon}$. Напряжение на конденсаторах $U = \frac{q_1}{C} = \frac{q_2}{C_0}$, откуда $U = \frac{2U_0}{1 + \varepsilon}$. Энергия, запасенная в электрическом поле конденсаторов,

$$W = \frac{(C + C_0)U^2}{2} = \frac{2U_0^2C_0}{1 + \varepsilon}.$$

Ответ: $q_1 = \dfrac{2\varepsilon C_0U_0}{1 + \varepsilon}$, $q_1 = 0{,}35$ мКл;
$q_2 = \dfrac{2C_0U_0}{1 + \varepsilon}$, $q_2 = 50$ мкКл;
$U = \dfrac{2U_0}{1 + \varepsilon}$, $U = 50$ В;
$W = 2U_0^2C_0/(1 + \varepsilon)$, $W = 10$ мДж.

3.21. Заряд конденсатора во время движения пластин не изменяется, поэтому энергия, запасенная в этом конденсаторе, сразу после смещения пластин равна $W_{01} = \frac{q_0^2}{2C}$, где $C = \frac{C_0}{2}$ — емкость этого конденсатора после смещения пластин. Энергия, запасенная во втором конденсаторе в этот момент времени, $W_{02} = \frac{q_0^2}{2C_0}$. Когда равновесие установится, напряжение на конденсаторах станет равным и заряды на них станут пропорциональны емкостям: $\frac{q_1}{C}=\frac{q_2}{C_0}$. По закону сохранения заряда $q_1+q_2=2q_0$. Следовательно,

$$q_1=\frac{2}{3}q_0 \text{ и } q_2=\frac{4}{3}q_0.$$

После установления равновесия энергия первого конденсатора $W_1=\frac{q_1^2}{2C}=\frac{4}{9}\frac{q_0^2}{C_0}$, а второго $W_2=\frac{q_2^2}{2C_0}=\frac{8}{9}\frac{q_0^2}{C_0}$. Энергия, перешедшая в тепло, $W=W_{01}+W_{02}-(W_1+W_2)=\frac{1}{6}q_0^2/C_0$. Подставляя $q_0=C_0U_0$, получаем окончательно $W=\frac{C_0U_0^2}{6}$.

Ответ: $W=\frac{C_0U_0^2}{6}$, $W=3$ мДж.

3.22. Конденсаторы отключены от источника, поэтому их заряд не изменяется. Энергия, запасенная в батарее, $W=2\frac{q_0^2}{2C_0}+\frac{q_0^2}{2C}$, где $C=\varepsilon C_0$. Напряжение при последовательном соединении

$$U=2\frac{q_0}{C_0}+\frac{q_0}{C},\quad U=\frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}\frac{q_0}{C_0}.$$

Энергия $W=\frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}\frac{q_0^2}{2C_0}$.

Ответ: $U=\frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}\frac{q_0}{C_0}$, $U=250$ В;

$$W=\frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}\frac{q_0^2}{2C_0},\quad W=12{,}5 \text{ мДж}.$$

3.23. При увеличении расстояния между пластинами совершается работа $A=\Delta W+\Delta q\mathscr{E}$, где ΔW — изменение энергии поля конденсатора, $\Delta q\mathscr{E}$ — работа против ЭДС источника, Δq — заряд, ушедший с конденсатора в источник при увеличении расстояния между пластинами, $\Delta q=q_1-q_2=(C_1-C_2)\mathscr{E}$. Так как $C_1=C$, $C_2=\frac{C}{n}=\frac{C}{2}$, то $\Delta q=\frac{C\mathscr{E}}{2}$. Изменение энергии $\Delta W=\frac{C_2\mathscr{E}^2}{2}-\frac{C_1\mathscr{E}^2}{2}=-\frac{1}{4}C\mathscr{E}^2$. Энергия, запасенная в электрическом поле конденсатора, уменьшилась. Значит, работа против ЭДС источника совершается за счет работы внешней силы (A) и энергии, запасенной в конденсаторе ($-\Delta W$). Следовательно,

$$A=-\frac{1}{4}C\mathscr{E}^2+\frac{C\mathscr{E}^2}{2}=\frac{C\mathscr{E}^2}{4}.$$

Ответ: $A=\frac{C\mathscr{E}^2}{4}$, $A=2{,}5\cdot10^{-9}$ Дж.

3.24. Работа $A=\Delta W+\Delta q\mathscr{E}$, где ΔW — изменение энергии конденсатора, $\Delta q\mathscr{E}$ — работа против ЭДС источника, Δq — заряд, ушедший с пластин конденсатора в источник при удалении диэлектрика. $\Delta W=\frac{C_2\mathscr{E}^2}{2}-\frac{C_1\mathscr{E}^2}{2}$, где $C_1=C$, $C_2=\frac{C}{\varepsilon}$, поэтому $\Delta W=-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\frac{C\mathscr{E}^2}{2}$. Так как $\Delta W<0$, то работа против ЭДС источника совершается за счет внешней силы и уменьшения энергии конденсатора. При удалении диэлектрика в источник уходит заряд

$$\Delta q=C\mathscr{E}-\frac{C\mathscr{E}}{\varepsilon}=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}C\mathscr{E}.$$

Окончательно

$$A=\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon}C\mathscr{E}^2.$$

Ответ: $A=\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon}C\mathscr{E}^2$, $A=1{,}8\cdot10^5$ Дж.

3.25. Заряды конденсаторов равны $q_1=C_1U_1$ и $q_2=C_2U_2$, где U_1, U_2 — напряжения на конденсаторах; $U_1=\mathscr{E}-U_2$, $U_2=IR$. Силу тока через сопротивление R определяем из закона Ома для полной цепи: $I=\frac{\mathscr{E}_2}{R+r}$. Окончательно $q_1=C_1\frac{(\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2)R+\mathscr{E}_1r}{R+r}$,

$$q_2=C_2\mathscr{E}_2R/(R+r).$$

Ответ: $q_1=C_1\frac{(\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2)R+\mathscr{E}_1r}{R+r}$, $q_1=1{,}1\cdot10^{-5}$ Кл;

$$q_2=C_2\frac{\mathscr{E}_2R}{R+r},\quad q_2=2{,}5\cdot10^{-5} \text{ Кл}.$$

3.26. Ток через $\mathscr{E}_2$ не идет, поэтому напряжение на зажимах равно $\mathscr{E}_2$. Оно складывается из напряжения на конденсаторе $C1$, напряжения на конденсаторе $C2$ и напряжения на резисторе $R2$, т. е. $\mathscr{E}_2=U_1+U_2+IR_2$. Заряды на конденсаторах одинаковы, следовательно, $U_1=\frac{q}{C_1}$, $U_2=\frac{q}{C_2}$. Сила тока через резистор $R2$ равна $I=\frac{\mathscr{E}_1}{R_1+R_2}$. Следовательно, $\mathscr{E}_2=\frac{q}{C_1}+\frac{q}{C_2}+\frac{\mathscr{E}_1R_2}{R_1+R_2}$. Отсюда находим заряд $q=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\left(\mathscr{E}_2-\frac{\mathscr{E}_1R_2}{R_1+R_2}\right)$ и через q находим выражения для U_1 и U_2:

$$U_1=\frac{q}{C_1}=\frac{C_2}{C_1+C_2}\frac{(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1)R_2+\mathscr{E}_2R_1}{R_1+R_2},$$

$$U_2=\frac{C_1}{C_1+C_2}\frac{(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1)R_2+\mathscr{E}_2R_1}{R_1+R_2}.$$

Ответ: $U_1=\frac{C_2}{C_1+C_2}\frac{(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1)R_2+\mathscr{E}_2R_1}{R_1+R_2}$, $U_1=5{,}25$ В;

$$U_2=\frac{C_1}{C_1+C_2}\frac{(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1)R_2+\mathscr{E}_2R_1}{R_1+R_2},\ U_2=1{,}75\ \text{В}.$$

3.27. При разомкнутом ключе ток течет по внешнему контуру цепи, состоящему из ЭДС и двух резисторов сопротивлением R. Разность потенциалов на обкладках конденсатора при этом равна $U_1=\frac{\mathscr{E}R}{2R+r}$, а его заряд $q_1=\frac{\mathscr{E}CR}{2R+r}$. Когда ключ замкнут, разность потенциалов на обкладках конденсатора равна напряжению на резисторе $U_2=I_1R$, а его заряд $q_2=CRI_1=CR\frac{\mathscr{E}-Ir}{2R}$. Учитывая, что $I=\frac{\mathscr{E}}{(2RR/3R)+r}$, находим $q_2=\frac{\mathscr{E}CR}{2R+3r}$. Заряд, прошедший при замыкании ключа, равен $q=q_1+q_2$, так как при замыкании ключа заряд на конденсаторе изменяет знак. Окончательно $q=\mathscr{E}CR\left(\frac{1}{2R+r}+\frac{1}{2R+3r}\right)$.

Ответ: $q=\mathscr{E}CR\left(\frac{1}{2R+r}+\frac{1}{2R+3r}\right)$, $q=3{,}4\cdot10^{-3}$ Кл.

3.28. Положим потенциал точки O равным нулю. Тогда потенциал точки B равен $\varphi_B=\frac{\mathscr{E}}{R_1+R_2}R_2$, потенциал точки A равен $\varphi_A=\frac{q_2}{C_2}$, где q_2 — заряд конденсатора $C2$. Кроме того,

$$\mathscr{E}=U_{C1}+U_{C2}=\frac{q_1}{C_1}+\frac{q_2}{C_2}. \qquad (1)$$

Заряд конденсатора $C3$:

$$q_3=C_3(\varphi_A-\varphi_B). \qquad (2)$$

По закону сохранения заряда

$$q_2=q_1+q_3. \qquad (3)$$

Решая систему уравнений (1), (2), (3), находим ответ.

Ответ: $q_1=\mathscr{E}C_1\frac{C_2(R_1+R_2)+C_3R_1}{(C_1+C_2+C_3)(R_1+R_2)}$, $q_1=7\cdot10^{-5}$ Кл;

$$q_2=\mathscr{E}C_2\frac{C_2(R_1+R_2)+C_3R_2}{(C_1+C_2+C_3)(R_1+R_2)},\ q_2=1{,}5\cdot10^{-4}\ \text{Кл};$$

$$q_3=\mathscr{E}C_3\frac{C_2R_2-C_1R_1}{(C_1+C_2+C_3)(R_1+R_2)},\ q_3=8\cdot10^{-5}\ \text{Кл}.$$

3.29. Примем за нуль потенциал точки O, тогда потенциал верхней пластины конденсатора $\varphi_1=IR-\mathscr{E}_1$, а потенциал нижней пластины $\varphi_2=\mathscr{E}_2$. По закону Ома для полной цепи $I=\frac{\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2}{2r+R}$. Разность потенциалов на конденсаторе

$$\varphi_2-\varphi_1=(\mathscr{E}_2+\mathscr{E}_1)-\frac{\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2}{2r+R}R=\frac{2r(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2)}{2r+R}.$$

Заряд на пластинах конденсатора

$$q=C(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{2Cr(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2)}{2r+R}.$$

Ответ: $q=\frac{2Cr(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2)}{2r+R}$, $q=0{,}2$ мкКл.

3.30. Напряжение на зажимах элемента $\mathscr{E}_2$ складывается из напряжения на конденсаторе C_1 $U_1=\frac{q}{C_1}$, напряжения на конденсаторе C_2 $U_2=\frac{q}{C_2}$ и напряжения на зажимах элемента $\mathscr{E}_1$:

$$\mathscr{E}_2=\frac{q}{C_1}+\frac{q}{C_2}+\mathscr{E}_1.$$

Заряды на конденсаторах одинаковы и равны:

$$q=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1).$$

Подставляя q в формулы для U_1 и U_2, находим:

$$U_1=\frac{C_2}{C_1+C_2}(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1),\ U_2=\frac{C_1}{C_1+C_2}(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1).$$

Ответ: $U_1=\frac{C_2}{C_1+C_2}(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1)$, $U_1=3$ В;

$$U_2=\frac{C_1}{C_1+C_2}(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1),\ U_2=2\ \text{В}.$$

3.31. Напряжение на зажимах батареи $U=\mathscr{E}-Ir$. Сопротивление внешнего участка цепи находим из уравнения $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_0}+\frac{1}{3R_0}$, $R=\frac{3}{4}R_0$. По закону Ома для полной цепи $I=\mathscr{E}/(R+r)$. Окончательно

$$U=\frac{3\mathscr{E}R_0}{2R_0+4r}.$$

Ответ: $U=\frac{3\mathscr{E}R_0}{2R_0+4r}$, $U=15$ В.

3.32. Показание вольтметра $V2$: $U_2=I_VR_V$, где I_V — сила тока через вольтметр, $I_V=I_1-I_2$. Так как вольтметры одинаковы, то сопротивление каждого $R_V=\frac{U_1}{I_1}$. Следовательно,

$$U_2=(I_1-I_2)\frac{U_1}{I_1}.$$

Ответ: $U_2=(I_1-I_2)\frac{U_1}{I_1}$, $U_2=0{,}1$ В.

3.33. Напряжение на вольтметре равно нулю, поэтому $\mathscr{E}_1 = Ir_1$ и $\mathscr{E}_2 = Ir_2$. Из этих уравнений $r_1 = \frac{\mathscr{E}_1}{I}$, $r_2 = \frac{\mathscr{E}_2}{I}$.

Ответ: $r_1 = \mathscr{E}_1/I$, $r_1 = 1{,}5$ Ом;
$r_2 = \mathscr{E}_2/I$, $r_2 = 3$ Ом.

3.34. Направления токов показаны на рисунке 3.11. Сила тока через проводник AB равна $I = I_1 - I_2$. Для источника $\mathscr{E}_1$ внешняя цепь состоит из параллельно соединенных сопротивлений участка AB, R_{AB} и r_2, но $R_{AB} = 0$, поэтому $I_1 = \frac{\mathscr{E}_1}{r_1}$. Аналогично $I_2 = \frac{\mathscr{E}_2}{r_2}$.

Следовательно,

$$I = \frac{\mathscr{E}_1}{r_1} - \frac{\mathscr{E}_2}{r_2}.$$

Ответ: $I = \frac{\mathscr{E}_1}{r_1} - \frac{\mathscr{E}_2}{r_2}$, $I = 50$ мА.

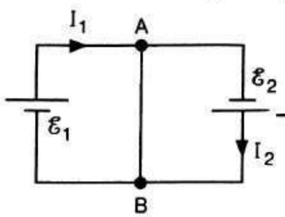


Рис. 3.11

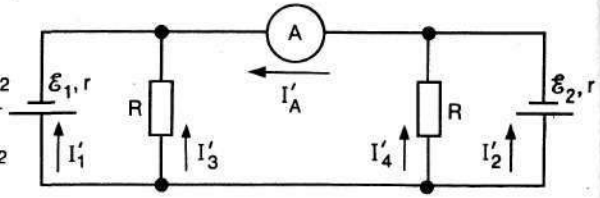


Рис. 3.12

3.35. Сила тока на каждом участке цепи равна алгебраической сумме сил токов, созданных каждым из источников (рис. 3.12). Поэтому сила тока, идущего через амперметр, $I_A = I'_A - I''_A$, где I'_A — сила тока, созданного источником с ЭДС $\mathscr{E}_1$, при этом источник с ЭДС $\mathscr{E}_2$ рассматривается как сопротивление r; I''_A — сила тока, созданного источником с ЭДС $\mathscr{E}_2$. Из рисунка видно, что $I'_A = I'_1 - I'_3$. Из закона Ома для полной цепи $I'_1 = \frac{\mathscr{E}_1}{r + R_{\text{внеш}}}$.

Так как внутреннее сопротивление прибора равно нулю, то $R_{\text{внеш}} = \frac{Rr/2}{R/2 + r} = \frac{Rr}{R + 2r}$. Тогда $I'_1 = \frac{\mathscr{E}_1 (R + 2r)}{2r(R + r)}$. Напряжение на зажимах источника $U'_1 = \mathscr{E}_1 - I'_1 r = \frac{\mathscr{E}_1 R}{2(R + r)}$, а сила тока $I'_3 = \frac{U'_1}{R} = \frac{\mathscr{E}_1 R}{2(R + r)}$. Тогда сила тока $I'_A = I'_1 - I'_3 = \frac{\mathscr{E}_1}{2r}$. Аналогично находим $I''_A - I'_A = \frac{\mathscr{E}_2}{2r}$.

Итак, сила тока через амперметр $I_A = I''_A - I'_A = \frac{\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1}{2r}$.

Ответ: $I_A = \frac{\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1}{2r}$, $I_A = 0{,}4$ А.

3.36. Расход энергии определим из закона Джоуля-Ленца $Q = I^2 Rt$. Время, требуемое для получения заданного количества меди, найдем из закона Фарадея $t = \frac{m}{kI}$. Сопротивление ванны $R = \rho \frac{l}{S}$. Следовательно, $Q = \frac{\rho l m I}{kS}$. Изменение расхода энергии $\Delta Q = \frac{\rho m I}{k} \left(\frac{l'}{S'} - \frac{l}{S} \right)$. Так как $l' = n_1 l$, а $S' = n_2 S$, то $\Delta Q = \frac{\rho m I l}{kS} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right)$.

Ответ: $\Delta Q = \frac{\rho m I l}{kS} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right)$, $\Delta Q = -1{,}5 \cdot 10^4$ Дж.

3.37. Полная мощность генератора $P = I\mathscr{E}$, где $\mathscr{E}$ — ЭДС генератора, а I — сила тока в линии $I = \frac{\mathscr{E}}{R + r + r_г}$. Полезная мощность $P_0 = I^2 R$. КПД генератора $\eta = \frac{R}{R + r + r_г}$. Отсюда находим R.

Ответ: $R = \frac{\eta (r + r_г)}{1 - \eta}$, $R = 9{,}5 \cdot 10^3$ Ом.

3.38. Сопротивления лампочек находим из формулы, связывающей мощность с сопротивлением и напряжением, $P = \frac{U^2}{R}$:

$$R_1 = \frac{U_0^2}{P_{01}}, \quad R_2 = \frac{U_0^2}{P_{02}}, \quad R_3 = \frac{U_0^2}{P_{03}}.$$

Полное сопротивление цепи $R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{U_0^2 (P_{01} + P_{02} + P_{03})}{P_{01} (P_{02} + P_{03})}$.
Сила тока в цепи равна силе тока через первую лампочку: $I = \frac{2U_0}{R} = \frac{2P_{01} (P_{02} + P_{03})}{U_0 (P_{01} + P_{02} + P_{03})}$. В первой лампочке выделяется мощность $P_1 = I^2 R_1$. Во второй и третьей лампочках выделяется мощность $P_2 = U^2/R_2$, $P_3 = \frac{U^2}{R_3}$, где U — напряжение на второй и третьей лампочках, $C = 2U_0 - IR_1$. Окончательно

$$P_1 = \frac{4P_{01} (P_{02} + P_{03})^2}{(P_{01} + P_{02} + P_{03})^2}, \quad P_2 = \frac{4P_{01}^2 P_{02}}{(P_{01} + P_{02} + P_{03})^2}, \quad P_3 = \frac{4P_{01}^2 P_{03}}{(P_{01} + P_{02} + P_{03})^2}.$$

Ответ: $P_1 = \frac{4P_{01} (P_{02} + P_{03})^2}{(P_{01} + P_{02} + P_{03})^2}$, $P_1 = 72$ Вт;

$$P_2=\frac{4P_{01}^2P_{02}}{(P_{01}+P_{02}+P_{03})^2}, \quad P_2=16 \text{ Вт};$$

$$P_3=\frac{4P_{01}^2P_{03}}{(P_{01}+P_{02}+P_{03})^2}, \quad P_3=32 \text{ Вт}.$$

3.39. При работе на холостом ходу $\mathscr{E}=I_0r+U_0$, где I_0 — сила тока холостого хода, U_0 — напряжение на клеммах мотора при холостом ходе. При работе с нагрузкой $\mathscr{E}=Ir+U$. Из этих двух уравнений находим изменение напряжения ΔU: $\Delta U=(I-I_0)\,r$. Относительное изменение напряжения

$$\frac{\Delta U}{U_0}=n=\frac{(I-I_0)\,r}{\mathscr{E}-I_0r}. \tag{1}$$

Мощность, отбираемая от батареи при холостом ходе, $P_0=I\mathscr{E}$, а при работе с нагрузкой $P=I\mathscr{E}$. Отношение мощностей:

$$\frac{P}{P_0}=x=\frac{I}{I_0}. \tag{2}$$

Исключая из уравнений (1) и (2) I_0, получим $x=\dfrac{(1-n)\,Ir}{Ir-n\mathscr{E}}$.

Ответ: $x=\dfrac{(1-n)\,Ir}{Ir-n\mathscr{E}}$, $x=20$.

3.40. Мощность, отбираемая от сети, $P=\dfrac{N}{\eta}$. Мощность механических потерь $P_{\text{м}}=P-(N+P_{\text{т}})$, где $P_{\text{т}}$ — мощность потерь при нагревании обмотки, $P_{\text{т}}=I^2R$, где I — сила тока в обмотке двигателя, $I=\dfrac{P}{U}=\dfrac{N}{\eta U}$. Таким образом, $P_{\text{м}}=\dfrac{N}{\eta}\left(1-\eta-\dfrac{NR}{\eta U^2}\right)$.

Ответ: $P_{\text{м}}=\dfrac{N}{\eta}\left(1-\eta-\dfrac{NR}{\eta U^2}\right)$, $P_{\text{м}}=125$ Вт.

3.41. Силы, действующие на вагон, показаны на рисунке 3.13. По второму закону Ньютона (проекции сил на оси OX и OY)

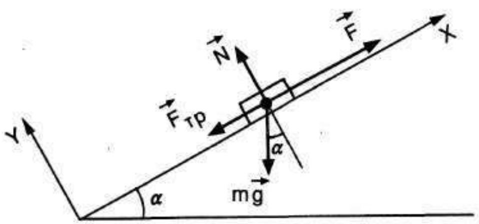


Рис. 3.13

$F-mg\sin\alpha-F_{\text{тр}}=ma$, где $F_{\text{тр}}=kmg\cos\alpha$,
$N-mg\cos\alpha=0$,
$\sin\alpha\approx\alpha$, $\cos\alpha\approx 1$, так как угол α мал.

Следовательно, сила тяги мотора $F=m\,(a+g\,(\alpha+k))$. Полезная мощность двигателя равна мощности, развиваемой силой тяги мотора, $\eta IU=Fv$, где v — мгновенная скорость вагона, прошедшего путь s с ускорением a, $v=\sqrt{2as}$, IU — затраченная мощность. Таким образом,

$$I=\frac{m\,(a+g\,(\alpha+k))\sqrt{2as}}{\eta U}.$$

Ответ: $I=\dfrac{m\,(a+g\,(\alpha+k))\sqrt{2as}}{\eta U}$, $I=305$ А.

3.42. Во внешней цепи рассеивается максимальная мощность, когда сопротивление внешней цепи равно внутреннему сопротивлению батареи r. Тогда сила тока во внешней цепи $I=\dfrac{\mathscr{E}}{2r}$, где $\mathscr{E}$ — ЭДС батареи, $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0P_0$. Мощность, рассеиваемая во внешней цепи, равна $P=I^2r=\dfrac{\mathscr{E}_0^2P_0^2}{4r}$, а КПД

$$\eta=\frac{P}{P_0}=\frac{\mathscr{E}_0^2P_0}{4r}.$$

Ответ: $\eta=\dfrac{\mathscr{E}_0^2P_0}{4r}$, $\eta=50\%$.

3.43. По закону Джоуля-Ленца в течение одного импульса в проволоке выделится количество теплоты $Q=I^2Rt_0=I^2\rho\,\dfrac{l}{S}\,t_0$, где l — длина проволоки. За время t через проволоку пройдет (tf) импульсов и в ней выделится энергия $Q=I^2\rho\,\dfrac{l}{S}\,t_0tf$. Эта энергия пойдет на нагревание проволоки: $Q=cm\Delta T$, где m — масса проволоки, $m=dlS$.

Таким образом,

$$t=\frac{cdS^2\Delta T}{I^2\rho t_0f},$$

где c — удельная теплоемкость меди, ρ — удельное сопротивление меди, d — плотность меди. Это табличные данные.

Ответ: $t=\dfrac{cdS^2\Delta T}{I^2\rho t_0f}$, $t=20$ с.

3.44. КПД определяется отношением полезной мощности P к мощности, расходуемой для питания лазера $N=IU+N_0$, где $N_0=I^2r$ — мощность, рассеиваемая на внутреннем сопротивлении источника. Таким образом,

$$\eta=\frac{P}{(U+Ir)\,I}.$$

Ответ: $\eta=\dfrac{P}{(U+Ir)\,I}$, $\eta=0{,}02\%$.

3.45. На электрон, движущийся в магнитном поле, действует сила Лоренца $F=evB\sin\alpha$, направленная перпендикулярно векторам скорости $\vec{v}$ и индукции $\vec{B}$. Движение электрона можно рассматривать как два независимых движения: одно — равномерное вдоль поля (в этом направлении сила на электрон не действует) со скоростью $v_{\parallel}=v\cos\alpha$, другое — равномерное движение по окружности со скоростью $v_{\perp}=v\sin\alpha$ (так как сила направлена перпендикулярно скорости) в плоскости, перпендикулярной вектору индукции $\vec{B}$. Шаг спирали $h=Tv\cos\alpha$, где T — период обращения по окружности. $T=\frac{2\pi R}{v\sin\alpha}$, где R — радиус окружности. Сила Лоренца создает центростремительное ускорение. По второму закону Ньютона $evB\sin\alpha=\frac{mv^2\sin^2\alpha}{R}$. Отсюда $R=\frac{mv\sin\alpha}{eB}$. Тогда

$$T=\frac{2\pi m}{eB} \text{ и } h=\frac{2\pi m}{eB}v\cos\alpha.$$

Ответ: $h=v\frac{2\pi m}{eB}\cos\alpha$, $h=9\cdot10^{-2}$ мм.

3.46. В отсутствие магнитного поля центростремительное ускорение создается силой кулоновского притяжения электрона к ядру $k\frac{e^2}{r^2}=m\omega_0^2 r$, где $\omega_0=2\pi\nu_0$ — частота вращения электрона по окружности радиуса r. Отсюда $\nu_0^2=\frac{ke^2}{4\pi^2 mr^3}$. В магнитном поле на электрон действует сила Лоренца $F_м=evB$. Центростремительное ускорение создается геометрической суммой кулоновской силы и силы Лоренца $k\frac{e^2}{r^2}\pm evB=m\omega^2 r$. Знак «$\pm$» зависит от направления вращения электрона и поясняется рисунком 3.14. Квадрат частоты вращения электрона в магнитном поле

$$\nu^2=\frac{ke^2}{4\pi^2 mr^3}\pm\frac{evB}{4\pi^2 mr}=\nu_0^2\pm\frac{evB}{4\pi^2 mr}.$$

Изменение квадрата частоты вращения равно $\nu^2-\nu_0^2=\pm\frac{evB}{4\pi^2 mr}$, где $v=2\pi\nu r$. Используем указание, приведенное в условии задачи: $\nu^2-\nu_0^2\approx2\nu_0\Delta\nu$. Получаем $\Delta\nu=\pm\frac{Be}{4\pi m}$.

Проверим размерность:

$$[\Delta\nu]=\frac{\text{Тл}\cdot\text{Кл}}{\text{кг}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{Кл}}{\text{Кл}\cdot\text{м/с}\cdot\text{кг}}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}}{\text{с}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{м}}=\text{с}^{-1}.$$

Ответ: $\Delta\nu=\pm\frac{Be}{4\pi m}$, $\Delta\nu=\pm1{,}4\cdot10^{10}$ с$^{-1}$.

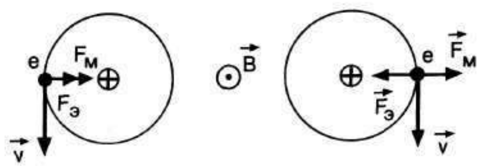


Рис. 3.14

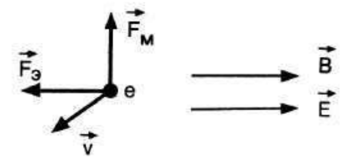


Рис. 3.15

3.47. На электрон действуют две силы $\vec{F}_э$ — со стороны электрического поля и $\vec{F}_м$ — со стороны магнитного поля (рис. 3.15):

$$F_э=eE,$$
$$F_м=evB.$$

Под действием силы $\vec{F}_э$ электрон приобретает ускорение $a_1=\frac{eE}{m}$ и за время t проходит путь $s=\frac{at^2}{2}=\frac{eEt^2}{2m}$. Отсюда $E=\frac{2ms}{et^2}$. Сила Лоренца $\vec{F}_м$ сообщает электрону центростремительное ускорение $a_2=\frac{v^2}{R}$, где R — радиус окружности, по которой двигался бы электрон в отсутствие электрического поля. Период обращения электрона $T=\frac{2\pi R}{v}$, где v — скорость движения по окружности, которую можно определить, записав уравнение второго закона Ньютона $evB=\frac{mv^2}{R}$, откуда $v=\frac{eRB}{m}$. Поэтому $T=\frac{2\pi m}{eB}$. n витков спирали электрон пройдет за время $t=nT=n\frac{2\pi m}{eB}$. Окончательно

$$E=\frac{eB^2s}{2\pi^2 mn^2}.$$

Ответ: $E=\frac{eB^2s}{2\pi^2 mn^2}$, $E=10^5$ В/м.

3.48. Максимальное значение ЭДС индукции $\mathscr{E}_{\max}$ в рамке зависит от скорости изменения магнитного потока $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ через площадь рамки S по закону электромагнитной индукции Фарадея. С учетом числа витков n можно записать:

$$\mathscr{E}_{\max}=n\left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right)_{\max}=n\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)_{\max}S\cos\alpha,$$

откуда $\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)_{\max}=\frac{\mathscr{E}_{\max}}{nS\cos\alpha}$.

Ответ: $\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)_{\max}=\frac{\mathscr{E}_{\max}}{nS\cos\alpha}$, $\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)_{\max}=2{,}5$ Тл/с.

3.49. Поток магнитной индукции $\Phi = BS\cos\alpha$, где α — угол между нормалью к рамке и вектором $\vec{B}$ магнитной индукции. $\alpha = 90° - \beta$, тогда $\Phi = BS\sin\beta$. При вращении $\beta = 2\pi ft$, где f — частота вращения. По закону Фарадея ЭДС индукции равна $\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = (BS\sin 2\pi ft)' = 2\pi fBS\cos 2\pi ft$. Максимальное значение ЭДС при $\cos 2\pi ft = 1$. $\mathscr{E}_{max} = 2\pi fBS$.

Для n витков $\mathscr{E}_{max} = 2\pi fnBS$.

Проверим размерность:

$$[\mathscr{E}] = \text{Тл}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с} = \text{Вб}\cdot\text{с} = \text{В}.$$

Ответ: $\mathscr{E}_{max} = 2\pi fnBS$, $\mathscr{E}_{max} = 63$ В.

3.50. Заряд, протекающий по катушке при введении магнита, равен $q = \frac{I}{\Delta t}$, где I — сила тока в катушке. По закону Ома $I = \frac{\mathscr{E}}{R}$, где R — сопротивление катушки, $\mathscr{E}$ — ЭДС индукции. $R = \rho\frac{l}{S} = \rho\frac{2\pi rn}{S}$. По закону электромагнитной индукции Фарадея $\mathscr{E} = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|$, где Φ — поток магнитной индукции через n витков катушки, $\Phi = Bn\pi r^2$. Окончательно

$$q = \frac{BrS}{2\rho}.$$

Проверим размерность:

$$[q] = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^3}{\text{Ом}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{Ом}} = \frac{\text{Вб}}{\text{Ом}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{Ом}} = \text{А}\cdot\text{с} = \text{Кл}.$$

Ответ: $q = \frac{BrS}{2\rho}$, $q = 2{,}8$ мКл.

3.51. Запишем закон Ома для электромотора при вращении ротора и при заторможенном якоре: $\mathscr{E} - \mathscr{E}_{инд} = IR$, где $\mathscr{E}_{инд}$ — ЭДС индукции, возникающая в якоре электромотора, $\mathscr{E} = I_0R$. По закону сохранения энергии работа тока идет на совершение механической работы и на нагрев проводов:

$$\mathscr{E}It = A + I^2RT,\ A = \mathscr{E}It\left(1 - \frac{I}{I_0}\right).$$

Ответ: $A = \mathscr{E}It\left(1 - \frac{I}{I_0}\right)$, $A = 8$ Дж.

3.52. Работа электрического тока, протекающего через обмотку, расходуется на совершение механической работы и на нагревание обмотки (потери на джоулево тепло): $\mathscr{E}It = I^2rt + A$, где $A = mgh$ — механическая работа, совершаемая по поднятию груза на высоту h. Высоту можно определить как длину нитки, намотанной на вал мотора за N оборотов: $h = 2\pi ant$. Тогда $\mathscr{E}It = I^2rt + mg2\pi ant$, откуда $n = \frac{I(\mathscr{E} - Ir)}{2\pi amg}$. По закону Ома $\mathscr{E} = Ir + \mathscr{E}_{инд}$, откуда $\mathscr{E}_{инд} = \mathscr{E} - Ir$.

Ответ: $n = \frac{I(\mathscr{E} - Ir)}{2\pi amg}$, $n = 10$ с$^{-1}$;

$\mathscr{E}_{инд} = \mathscr{E} - Ir$, $\mathscr{E}_{инд} = 0{,}78$ В.

3.53. По закону Фарадея ЭДС индукции $\mathscr{E}_{инд} = \left|-L\frac{\Delta I}{\Delta t}\right|$, где L — индуктивность катушки. Резонансная частота колебательного контура зависит от индуктивности и емкости (формула Томсона): $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. Отсюда находим индуктивность L. Окончательно

$$\mathscr{E}_{инд} = \frac{1}{4\pi^2\nu^2C}\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Ответ: $\mathscr{E}_{инд} = \frac{1}{4\pi^2\nu^2C}\frac{\Delta I}{\Delta t}$, $\mathscr{E}_{инд} = 0{,}25$ В.

IV. ОПТИКА

4.1. Скорость света c_1 в веществе в n раз меньше скорости света c в вакууме, где n — показатель преломления света в данном веществе: $c_1 = c/n$. Показатель преломления определим из закона преломления света:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n,$$

откуда $c_1 = c\sin\beta/\sin\alpha$.

В этой и последующих задачах мы будем предполагать, что показатель преломления воздуха $n_0 = 1$ и скорость света в воздухе и в вакууме одинакова.

Ответ: $c_1 = \frac{c\sin\beta}{\sin\alpha}$, $c_1 \approx 2\cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

4.2. Запишем закон преломления: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$. По условию задачи $\beta = \alpha - \alpha_0$, где $\alpha_0 = 10°$. Запишем: $\sin\alpha = n\sin(\alpha - \alpha_0)$. Разделим обе части уравнения на $\sin\alpha$, получим:

$$1 = n\frac{\cos\alpha_0\sin\alpha}{\sin\alpha} - \frac{n\sin\alpha_0\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

откуда $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{n\cos\alpha_0 - 1}{n\sin\alpha_0}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha_0 - \frac{1}{n\sin\alpha_0}$.

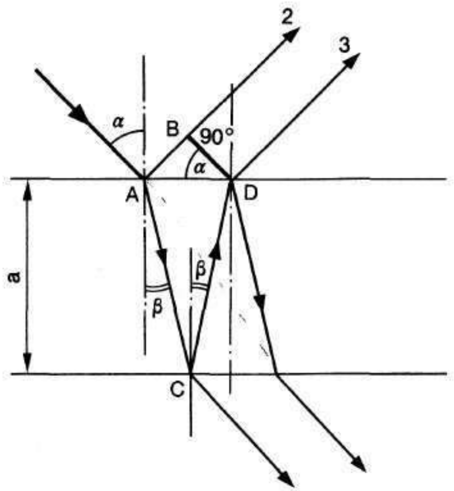


Рис. 4.1

Ответ: $\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha_0-\dfrac{1}{n\sin\alpha_0}$, $\alpha\approx 36°30'$.

4.3. На рисунке 4.1 показан ход лучей.

Два соседних отраженных луча параллельны. Расстояние между ними $DB=AD\cos\alpha$. Расстояние AD определим из треугольника ACD: $AD=2a\operatorname{tg}\beta$. Угол β определим из закона преломления:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n.$$

Окончательно $l=DB=2a\operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{\sin\alpha}{n}\right)\cos\alpha$,

$$\text{или}\ \ l=2a\cos\alpha\,\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}=\frac{a\sin 2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}.$$

Ответ: $l=\dfrac{a\sin 2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}$, $l=0{,}81$ см.

4.4. Ход лучей в призме показан на рисунке 4.2. MN — перпендикуляр, восстановленный в точку падения, EA — падающий луч, AD — луч отраженный, AC — луч преломленный.

$$\gamma=90°-\beta.$$

По свойству углов равнобедренного треугольника получим:

$$\varphi=180°-2\gamma,\ \ \varphi=2\beta.$$

$\alpha+\beta=90°$, так как углы α, β и угол DAC смежные. Воспользуемся законом преломления: $\sin\alpha/\sin\beta=n$,

$$\sin(90°-\beta)=\cos\beta,\ \ \operatorname{ctg}\beta=n,$$

откуда $\beta=\operatorname{arcctg}n$, $\varphi=2\operatorname{arcctg}n$.

Ответ: $\varphi=2\operatorname{arcctg}n$, $\varphi\approx 67°20'$.

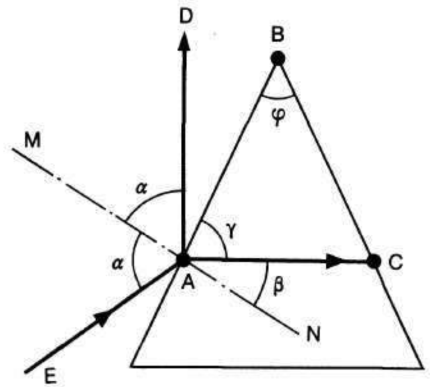


Рис. 4.2

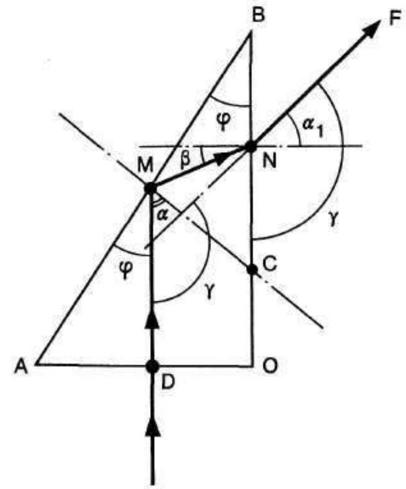


Рис. 4.3

4.5. Ход лучей в призме показан на рисунке 4.3. В точке D луч, падающий на призму перпендикулярно ее грани, не испытывает преломления. На грань AB луч падает под углом α:

$$\alpha=90°-\varphi,\ \ \alpha=60°.$$

Этот угол больше угла полного внутреннего отражения, который для границы стекло — воздух равен $\alpha_0=\arcsin\dfrac{1}{n}$, $\alpha_0\approx 41°20'$. Следовательно, на грани призмы AB происходит явление полного отражения: луч MN падает на грань BO, причем угол падения $\beta=\varphi$, $\beta=30°$. Для доказательства рассмотрим треугольник MBN: $\beta+90°+\varphi+(90°-\alpha)=180°$, $\beta=\alpha-\varphi=90°-2\varphi$, так как $\varphi=30°$, то $\beta=\varphi$. Угол α_1 — угол преломления луча на границе стекло — воздух определим из закона преломления:

$$\sin\alpha_1/\sin\beta=n,\ \ \alpha_1=\arcsin(n-\sin\beta).$$

Угол между падающим и вышедшим лучами определится как

$$\gamma=\alpha_1+90°,\ \ \gamma=90°+\arcsin(n\sin\beta).$$

Ответ: $\gamma=90°+\arcsin(n\sin\varphi)$, $\gamma\approx 138°40'$.

4.6. Докажем, что при малых углах падения на тонкую призму любой луч отклоняется ею на угол $\gamma=\varphi(n-1)$, где n — показатель преломления вещества призмы.

Рассмотрим треугольник ABC (рис. 4.4): $\alpha-\beta+\alpha_1-\beta_1+(180°-\gamma)=180°$, $\gamma=\alpha-\beta+\alpha_1-\beta_1$, $\gamma=\alpha+\alpha_1-(\beta+\beta_1)$. Запи-

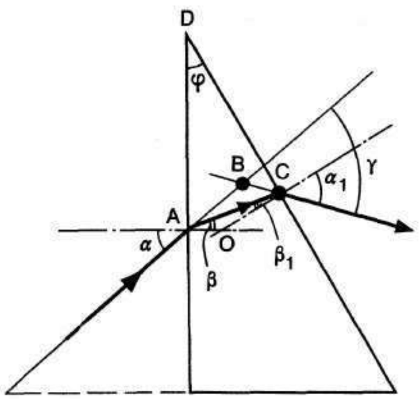


Рис. 4.4

шем закон преломления: $\sin\alpha/\sin\beta=n$. Учитывая малость рассматриваемых углов, т. е. $\sin\alpha\approx\alpha$, $\sin\beta\approx\beta$, получим $\alpha=n\beta$, $\alpha_1=n\beta_1$.

Из треугольника ADC получаем $\varphi+(90^\circ-\beta)+(90^\circ-\beta_1)=180^\circ$, тогда $\varphi=\beta+\beta_1$, или $\gamma=n(\beta+\beta_1)-(\beta+\beta_1)$. Окончательно $\gamma=\varphi(n-1)$.

Докажем теперь, что $x\approx a$ для тонкой призмы. Рассмотрим рисунок 4.5. Из треугольника $CS'O$ получим $H=a\alpha+x(\gamma-\alpha)$. Из треугольника $SS'O$ $H=\gamma a$.

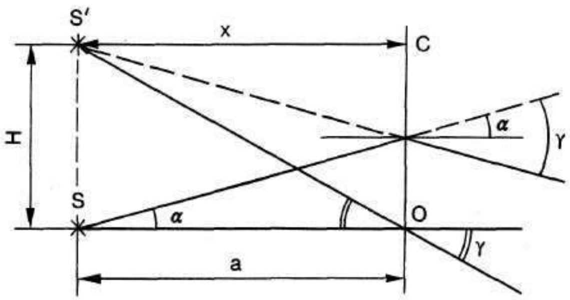


Рис. 4.5

Приравняем выражения для H: $a\alpha+x(\gamma-\alpha)=\gamma a$, откуда $(a-x)\alpha-\gamma(a-x)=0$, или $(a-x)(\alpha-\gamma)=0$. Так как $\alpha\neq\gamma$, то $a=x$.

Расстояние между когерентными источниками $S'S=2H=2a\gamma=2a(n-1)\varphi$.

Ответ: $S'S''=2a(n-1)\varphi$, $S'S''\sim1$ см.

4.7. Ход лучей показан на рисунке 4.6. В задаче 4.6 было показано, что при прохождении через тонкую призму с малым преломляющим углом φ лучи отклоняются на угол γ, определяемый соотношением

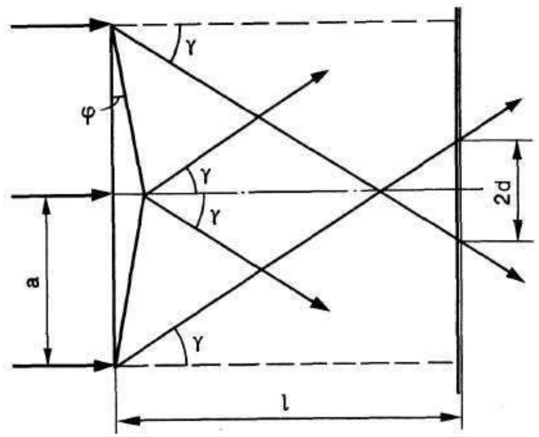


Рис. 4.6

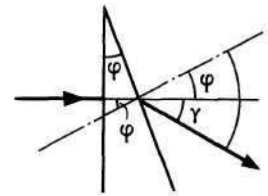


Рис. 4.7

$$\gamma=\varphi(n-1).$$

Докажем это соотношение еще одним способом. Из рисунка 4.7 видно, что по закону преломления

$$\sin(\varphi+\gamma)/\sin\varphi=n,$$

в виду малости углов запишем: $(\varphi+\gamma)=n\varphi$, откуда $\gamma=\varphi(n-1)$. Вернемся к рисунку 4.6. Пренебрегая толщиной призмы и учитывая малость углов ($\operatorname{tg}\gamma\approx\gamma$, $\operatorname{tg}\varphi\approx\varphi$), получим:

$$l\approx\frac{a}{\gamma}+\frac{d}{\gamma},\ l\approx\frac{a+d}{\gamma}.$$

Подставляя выражение для γ, получим окончательное выражение $l\approx(a+d)/\varphi(n-1)$.

Ответ: $l\approx(a+d)/\varphi(n-1)$, $l\approx114$ см.

4.8. На рисунке 4.8 показан ход лучей от источника. Луч BC — луч, вышедший в воздух. Запишем закон преломления света для границы AD

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{n_2}{n_1},\tag{1}$$

для границы BB_1

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{n}{n_2}.\tag{2}$$

Из первого соотношения получим $\sin\beta=\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha$, $\beta=45^\circ$, из второго $\sin\gamma=n_2\sin\beta=\sin\alpha\ \ n_1=\sqrt{1{,}5}>1$. Луч AB испытывает полное отражение на границе жидкость — воздух. Луч BC отсутствует.

Ответ: Луч из жидкости не выйдет.

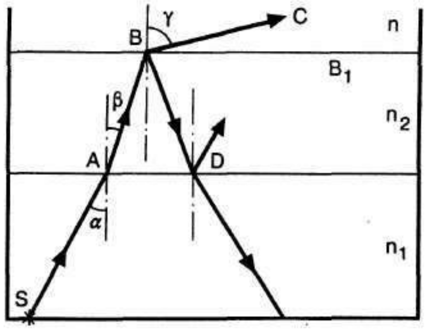


Рис. 4.8

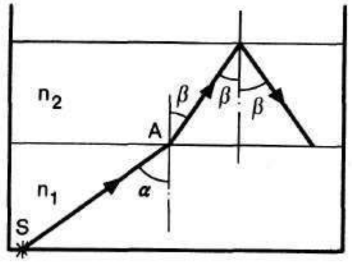


Рис. 4.9

4.9. Ход лучей показан на рисунке 4.9. Для полного отражения на границе жидкость — воздух необходимо выполнение условия

$$\sin\beta=\frac{1}{n_2}.$$

Закон преломления для луча SA

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{n_2}{n_1}.$$

Решая эти уравнения совместно, имеем:

$$\sin\alpha=\frac{1}{n_1},$$

откуда $n_1=\dfrac{1}{\sin\alpha}$.

Ответ: $n_1=\dfrac{1}{\sin\alpha}$, $n_1\approx 1{,}2$.

4.10. Ход лучей через призму показан на рисунке 4.10.

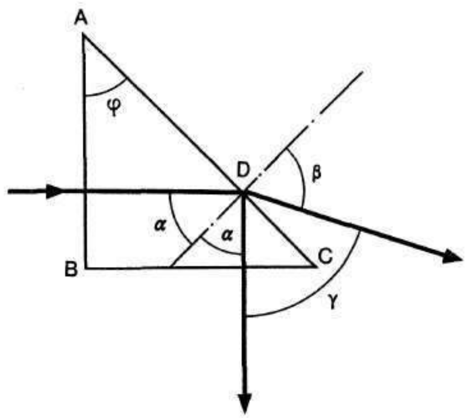


Рис. 4.10

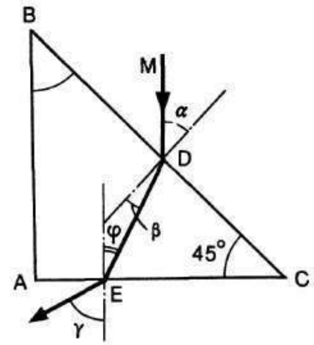


Рис. 4.11

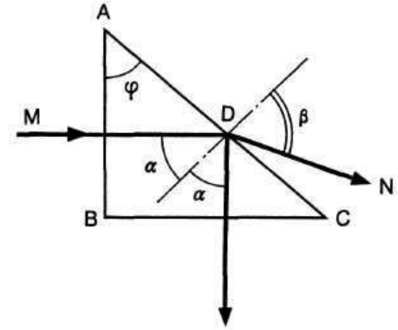


Рис. 4.12

Запишем закон преломления: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{1}{n}$, $\alpha=45°$, находим $\sin\beta=n\sin\alpha$, $\sin\beta=\sqrt{1{,}5}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta=60°$.

$$\gamma=180°-(\alpha+\beta)=75°.$$

Ответ: $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$, $\gamma=75°$.

4.11. Ход лучей показан на рисунке 4.11. Запишем закон преломления для луча MD:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n,$$

откуда

$$\sin\beta=\frac{\sin\alpha}{n},\ \ \beta=\arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right),\ \ \beta=30°.$$

Для треугольника EDC можно записать: $(90°-\beta)+45°+90°-\varphi=180°$, $\varphi=15°$. Закон преломления для луча DE: $\dfrac{\sin\gamma}{\sin\varphi}=n$, откуда $\sin\gamma=n\sin\varphi$, $\gamma=\arcsin(n\sin\varphi)=\arcsin(\sqrt{2}\,\sin 15°)$.

Ответ: $\gamma=\arcsin(\sqrt{2}\,\sin 15°)$, $\gamma\approx 21°30'$.

4.12. Ход луча показан на рисунке 4.12. $\alpha=\varphi=45°$. Закон преломления для луча MD: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{1}{n}$, откуда $\beta=\arcsin(n\sin\alpha)$.

В первом случае

$$\sin\beta_1=1{,}2\sin 45°\approx 0{,}84,\ \ \beta_1\approx 57°.$$

Во втором случае $\sin\alpha_0=\dfrac{1}{n_2}=0{,}625$, $\alpha_0=38{,}7°$ — угол полного отражения. Угол α больше угла α_0. На границе стекло — воздух происходит полное отражение. Луч DN отсутствует. Луч отразится от поверхности AC и выйдет из грани BC.

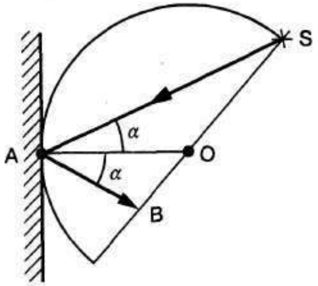


Рис. 4.13

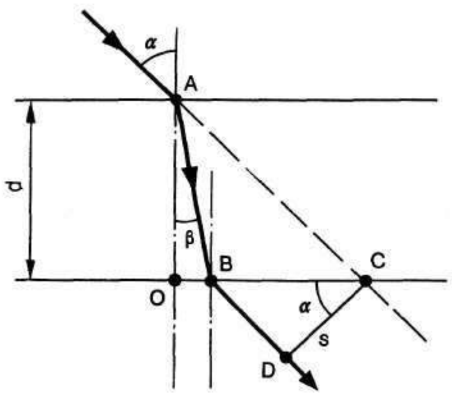


Рис. 4.14

4.13. Ход луча показан на рисунке 4.13. Треугольник SOA равнобедренный, следовательно, $SA=2R\cos\alpha$, $AB=R\cos\alpha$. Весь путь луча $l=n3R\cos\alpha$.

Ответ: $l=n3R\cos\alpha$, $l\approx39$ см.

4.14. Ход лучей через плоскопараллельную пластинку показан на рисунке 4.14. Смещение определим из треугольника DBC:

$$s=BC\cos\alpha, \qquad (1)$$
$$BC=OC-OB.$$

Из треугольника AOB $OB=d\,\mathrm{tg}\,\beta$.
Из треугольника AOC $OC=d\,\mathrm{tg}\,\alpha$.
Подставим эти соотношения в (1): $s=d(\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta)\cos\alpha$.

Из закона преломления получим $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n$, $\sin\beta=\frac{\sin\alpha}{n}$. Тогда

$\cos\beta=\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}}$, $\mathrm{tg}\,\beta=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}$, откуда

$$d=\frac{s}{\mathrm{tg}\,\alpha-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}}.$$

Ответ: $d=\frac{s}{\mathrm{tg}\,\alpha-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}}$, $d\approx3{,}5$ см.

4.15. Длина хода лучей в плоскопараллельной пластинке равна $l=AB\cdot n$ (рис. 4.14). AB определим из треугольника AOB: $AB=d/\cos\beta$. Воспользуемся соотношением, полученным в задаче 4.14.

$$\cos\beta=\frac{1}{n}\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}.$$

Тогда $AB=dn/\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}$,

$l=dn^2/\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}$.

Ответ: $l=dn^2/\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}$, $l\approx5{,}51$ см.

4.16. Лучи не выйдут из сосуда, если лучи, падающие от источника A в крайние точки диска, составляют с нормалью угол, равный углу полного отражения. Все другие лучи, падающие под углами большими угла α_0, не выйдут из воды, они будут только отражаться от поверхности воды. Другими словами, мы наблюдаем явление полного отражения. Размеры диска легко определить из треугольника SOA (рис. 4.15): $R=H\,\mathrm{tg}\,\alpha_0$, $R=H\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha_0}}$. Угол α_0 определяется из условия $\sin\alpha_0=\frac{1}{n}$.

Находим $R=H\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$.

Ответ: $R=\frac{H}{\sqrt{n^2-1}}$, $R\approx17$ см.

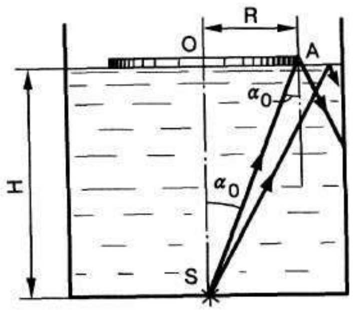


Рис. 4.15

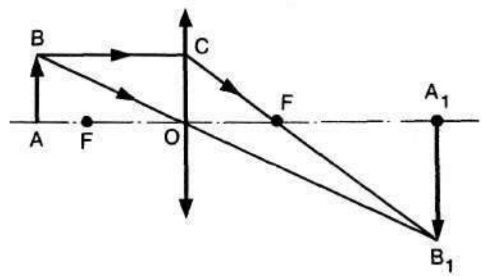


Рис. 4.16

4.17. При решении задач на линзы часто используется формула тонкой линзы

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}.$$

Эта формула во многих программах исключена, поэтому мы выведем ее для дальнейшего использования в задачах. На рисунке 4.16 показан ход лучей, используемых для построения изображения предмета. Луч BC параллелен главной оптической оси AO, после линзы этот луч идет через фокус линзы (по определению). Луч BO проходит через оптический центр линзы и не претерпевает преломления: BOB_1 — прямая. Обозначим высоту предмета AB через h, высоту изображения A_1B_1 через H, d — расстояние от предмета до линзы, f — расстояние от линзы до изображения, F — фокусное расстояние линзы. Из подобия треугольников ABO

и A_1B_1O получим $\frac{h}{H}=\frac{d}{f}$. Из подобия треугольников COF и FA_1B_1 получим $\frac{h}{H}=\frac{F}{f-F}$, или $\frac{d}{f}=\frac{F}{f-F}$. После преобразования имеем $df=Ff+dF$. Разделим обе части на Fdf, получим $\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}$. Это и есть формула тонкой линзы.

Вернемся к решению задачи 4.17. Увеличением называется отношение высоты изображения к высоте предмета: $\Gamma=H/h$, или $\Gamma=f/d$. Из формулы тонкой линзы $F=df/(f+d)$, или $F=\frac{d\Gamma}{\Gamma+1}$.

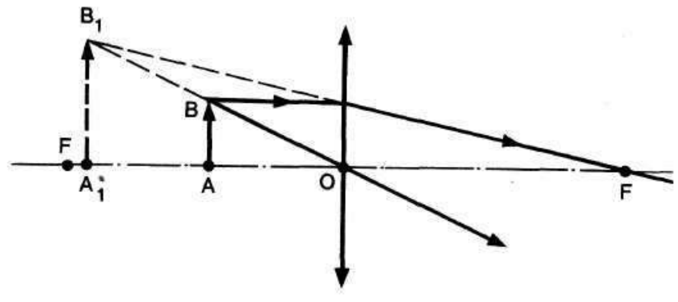


Рис. 4.17

Рассмотрим еще один случай, когда линза дает увеличенное изображение предмета. Ход лучей показан на рисунке 4.17. В этом случае получается увеличенное мнимое изображение, так как пересекаются не сами лучи, а их продолжение. Линза в этом случае называется лупой. Формула тонкой линзы для лупы $\frac{1}{F}=\frac{1}{d}-\frac{1}{f}$, перед $\frac{1}{f}$ стоит знак «минус», что и указывает на получение мнимого изображения. Тогда $F=\frac{df}{f-d}$, $F=\frac{d\Gamma}{\Gamma-1}$.

Ответ: $F=\frac{d\Gamma}{\Gamma+1}$, $F=30$ см;

$F=\frac{d\Gamma}{\Gamma-1}$, $F=60$ см.

4.18. Оптическая сила равна $D=\frac{1}{F}$. Воспользуемся соотношениями, полученными в предыдущей задаче 4.17:

$$D=\frac{1}{d}+\frac{1}{d\Gamma},\ d=\frac{1+\Gamma}{\Gamma D},\ d=0{,}075\ \text{м}.$$

Для получения действительного увеличенного изображения надо поместить предмет на расстоянии 7,5 см.

Рассмотрим получение мнимого увеличенного изображения:

$$D=\frac{1}{d}-\frac{1}{\Gamma d},\ d=\frac{\Gamma-1}{\Gamma D},\ d=2{,}5\ \text{см}.$$

Ответ: $d=\frac{\Gamma+1}{\Gamma D}$, $d=7{,}5$ см, изображение действительное; $d=\frac{\Gamma-1}{\Gamma D}$, $d=2{,}5$ см, изображение мнимое.

4.19. Формула тонкой линзы симметрична по отношению к f и d. В силу этого можно утверждать, что если при перемещении линзы получаются два изображения при закрепленных предмете и экране (рис. 4.18), т. е. $L=d+f=\text{const}$, то $f_1=d_2$, $d_1=f_2$. Запи-

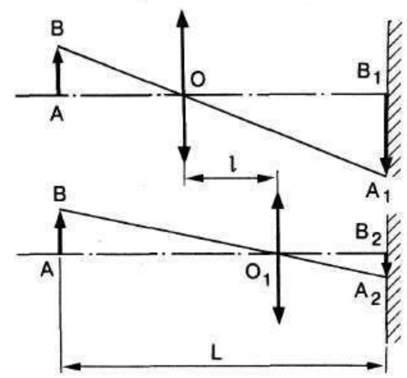


Рис. 4.18

шем соотношения для двух положений линзы: $d_2=d_1+l$,

$$f_1=d_1+l,\ L=d_1+d_1+l,\ \text{или}$$
$$d_1=(L-l)/2,\ f_1=(L+l)/2.$$

По формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1},\ F=\frac{d_1f_1}{d_1+f_1},$$
$$F=\frac{L-l}{2}\,\frac{L+l}{2}\,\frac{1}{L},\ F=\frac{L^2-l^2}{4L}.$$

Ответ: $F=\frac{L^2-l^2}{4L}$, $F=23{,}8$ см.

4.20. Воспользуемся симметричностью формулы тонкой линзы по отношению к f и d. Запишем: $f_1=d_2$, $f_2=d_1$. Из рисунка 4.18 видно, что $\frac{h_1}{h}=\frac{f_1}{d_1}$, $\frac{h_2}{h}=\frac{f_2}{d_2}$.

Перемножим эти соотношения:

$$\frac{h_1h_2}{h^2}=1,\ h=\sqrt{h_1h_2}.$$

Ответ: $h=\sqrt{h_1h_2}$, $h=12$ см.

4.21. Увеличение определяется как отношение высоты предмета к высоте изображения: $\Gamma = H/h$ или $\Gamma = f/d$ (см. рис. 4.18).

Оптическая сила линзы $D = \frac{1}{F}$.

Из формулы тонкой линзы получим $D = \frac{1}{d} + \frac{1}{\Gamma d}$, $L = d + \Gamma d$.

Окончательно $d = \frac{L}{1+\Gamma}$, $D = \frac{1+\Gamma}{\Gamma d}$, $D = \frac{(\Gamma+1)^2}{\Gamma L}$.

Ответ: $D = \frac{(\Gamma+1)^2}{\Gamma L}$, $D = 1{,}25$ дптр.

4.22. Возможны два случая расположения стержня AB. На рисунке 4.19 показан ход лучей в рассеивающей линзе.

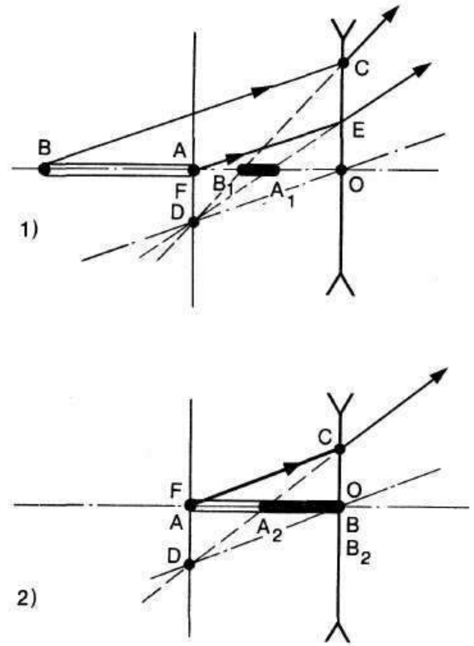


Рис. 4.19

Для построения изображения стержня воспользуемся следующим свойством: лучи, параллельные побочной оптической оси (DO), после рассеивающей линзы идут так, что их продолжение пересекается в одной и той же точке (D) фокальной плоскости. Фокальная плоскость — плоскость, перпендикулярная главной оптической оси и проходящая через фокус линзы. $BC \parallel OD$ и $AC \parallel OD$; DC пересекается с главной оптической осью в точке B_1; DE пересекается с главной оптической осью в точке A_1. Изображение стержня — A_1B_1. Для вычисления размеров изображения

воспользуемся формулой тонкой линзы $-\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f}$. Знак «минус» перед оптической силой означает, что линза рассеивающая, а перед слагаемым $\frac{1}{f}$ означает, что в формировании мнимого изображения «участвуют» не сами лучи, а их продолжение.

Получим $f = \frac{dF}{F+d}$.

Для случая 1) $d_A = F$, $d_B = F + l$;

$$f_{A_1} = \frac{FF}{2F} = \frac{F}{2},\ f_{B_1} = \frac{F(F+l)}{2F+l};$$

$$B_1A_1 = f_{B_1} - f_{A_1},\ B_1A_1 = F\left(\frac{F+l}{2F+l} - \frac{1}{2}\right),$$

$$B_1A_1 = \frac{Fl}{2(2F+l)}.$$

Для случая 2) $d_A = F$, $d_B = 0$; $f_{A_2} = \frac{F}{2}$, $f_{B_2} = 0$;

$$B_2A_2 = F/2.$$

Ответ: $B_1A_1 = \frac{Fl}{2(2F+l)}$, $B_1A_1 = 2$ см;
$B_2A_2 = F/2$, $\quad B_2A_2 = 6$ см.

4.23. Ход лучей в собирающей *1* и рассеивающей *2* линзах показан на рисунке 4.20.

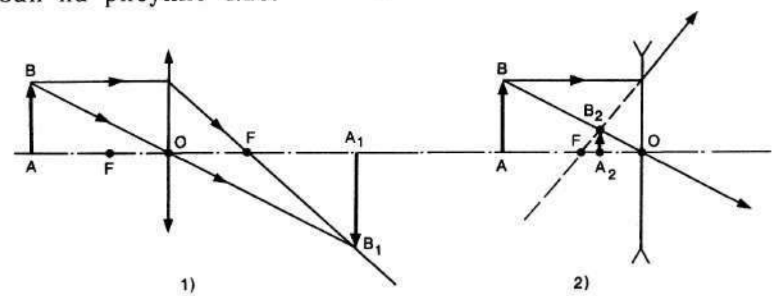


Рис. 4.20

Запишем формулу тонкой линзы для собирающей линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_1} \tag{1}$$

и рассеивающей линзы

$$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f_2}. \tag{2}$$

Вычтем из соотношения (1) соотношение (2): $\frac{2}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$, откуда $F=\frac{2f_1f_2}{f_1+f_2}$.

Увеличение определяется так $\Gamma=f/d$. В первом случае $\Gamma_1=\frac{f_1-f_2}{2f_2}$. Во втором случае $\Gamma_2=\frac{f_1-f_2}{2f_1}$.

Ответ: $F=\frac{2f_1f_2}{f_1+f_2}$, $F=32$ см; $\Gamma_1=\frac{f_1-f_2}{2f_2}$, $\Gamma_1=1{,}5$;

$\Gamma_2=\frac{f_1-f_2}{2f_1}$, $\Gamma_2=0{,}375$.

4.24. Построение изображения показано на рисунке 4.21 (*1*). На рисунке 4.21 (*2*) показано смещенное положение линзы. Рас-

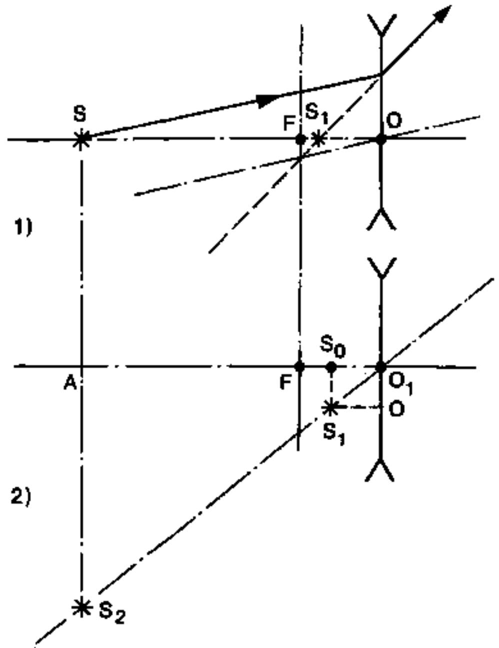


Рис. 4.21

стояние от линзы до источника d не изменяется, так как не изменилось расстояние f от изображения до линзы. Луч, идущий от источника S_2 в новом положении через оптический центр линзы O_1, должен проходить через изображение источника — луч $S_2S_1O_1$. $OO_1=2$ см — смещение линзы. $S_0S_1=2$ см, так как оптическая ось как бы отодвинулась от источника вверх на 2 см. Рассмотрим подобные треугольники AS_2O_1 и $S_0S_1O_1$: $\frac{AO_1}{S_0O_1}=\frac{AS_2}{S_0S_1}$. Расстояние $f=S_0O_1$ определим из формулы тонкой линзы:

$$-\frac{1}{F}=\frac{1}{d}-\frac{1}{f},\ f=\frac{dF}{d+F}.\ AO_1=d,\ S_0S_1=a.$$

$$AS_2=\frac{da(d+F)}{dF},\ AS_2=\frac{a(d+F)}{F},\ AS_2=8\ \text{см}.$$

Ответ: источник необходимо передвинуть на 8 см перпендикулярно оптической оси в направлении, противоположном направлению смещения линзы.

4.25. Действительное изображение шарика будет существовать в течение времени, когда шарик находится от линзы на расстоянии, большем фокусного расстояния $F=1/D$. Максимальная высота подъема шарика от поверхности линзы определяется из закона сохранения энергии. Будем считать, что поверхность линзы — нулевой уровень потенциальной энергии. Тогда

$$\frac{mv_0^2}{2}=mgh,\ \text{откуда}\ h=\frac{v_0^2}{2g}.$$

Учтем, что время падения равно времени подъема. Рассмотрим падение шарика из точки, максимально удаленной от поверхности линзы. Запишем:

$$\frac{v_0^2}{2g}-\frac{1}{D}=\frac{gt^2}{2};$$

$$t=\sqrt{\frac{v_0^2}{g^2}-\frac{2}{gD}};\ \tau=2t,$$

$$\tau=2\sqrt{\frac{v_0^2}{g^2}-\frac{2}{gD}}.$$

Ответ: $\tau=2\sqrt{\frac{v_0^2}{g^2}-\frac{2}{gD}}$, $\tau\approx1{,}6$ с.

4.26. Запишем формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{4F}+\frac{1}{f},$$

откуда получим $f=\frac{4}{3}F$. Зная, что $\Gamma=\frac{f}{d}$,

определим увеличение $\Gamma=\frac{4F}{3\cdot4F}=\frac{1}{3}$.

Ответ: изображение в 3 раза меньше предмета.

4.27. Объектив фотоаппарата будем рассматривать как тонкую собирающую линзу: $\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}$, $f=\Gamma d$, $\Gamma=\frac{1}{9}$, $\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{9}{d}$.

Получим $d=10\ F$.

Ответ: $d=10\ F$, $d=50$ см.

4.28. Для невооруженного глаза, т. е. без очков, расстояние наилучшего зрения — это расстояние от предмета до хрусталика, при котором получается четкое изображение предмета на сетчатке глаза. Хрусталик считаем тонкой собирающей линзой. Тогда

$$\frac{1}{F_x}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}, \qquad (1)$$

где F_x — фокусное расстояние хрусталика, f — расстояние от хрусталика до сетчатки.

Для устранения недостатка зрения человек носит очки такой оптической силы, чтобы для системы линз очки — хрусталик расстояние наилучшего зрения равнялось расстоянию наилучшего зрения для нормального глаза $d_0=25$ см. Считаем очки и хрусталик расположенными очень близко друг от друга, тогда $D=D_x+D_л$ или

$$\frac{1}{F_л}+\frac{1}{F_x}=\frac{1}{d_0}+\frac{1}{f}. \qquad (2)$$

Вычтем уравнение (1) из уравнения (2), получим:

$$\frac{1}{F_л}=\frac{1}{d_0}-\frac{1}{d}, \quad D_л=\frac{d-d_0}{dd_0}.$$

Оптическая сила одной линзы равна

$$D_1=\frac{d_1-d_0}{d_1d_0},$$

другой

$$D_2=\frac{d_2-d_0}{d_2d_0}.$$

Для системы из двух линз оптические силы складываются:

$$D=D_1+D_2,$$
$$D=\frac{d_1-d_0}{d_1d_0}+\frac{d_2-d_0}{d_2d_0}.$$

Ответ: $D=\frac{d_1-d_0}{d_1d_0}+\frac{d_2-d_0}{d_2d_0}$, $D=5$ дптр.

4.29. Выведем соотношение для увеличения лупы. Лупой является собирающая линза, через которую рассматривается предмет, расположенный между фокусом и линзой или в самой фокальной плоскости. В первом случае ход лучей показан на рисунке 4.22. Расстояние $OB_1=f$ должно быть равно расстоянию наилучшего зрения для нормального глаза: $f=D_0=25$ см. Увеличение лупы в этом случае равно $\Gamma=\frac{D_0}{d}$. Из формулы тонкой линзы $\frac{1}{F}=\frac{1}{d}-\frac{1}{D_0}$ определим $d=\frac{FD_0}{F+D_0}$. Окончательно увеличение $\Gamma_1=\frac{F+D_0}{F}=1+\frac{D_0}{F}$, $\Gamma_1=1+D_0D_л$.

Если глаз адаптирован на бесконечность, то он рассматривает изображение предмета, расположенного в фокальной плоскости

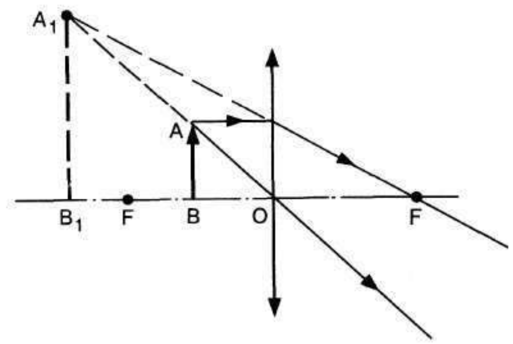


Рис. 4.22

(рис. 4.23). Увеличение лупы в этом случае определяется по формуле $\Gamma_2=\frac{D_0}{F}$, $\Gamma_2=D_0D_л$. Оптическая сила нескольких линз $D_л$ равна сумме оптических сил каждой линзы, т. е. $D_л=nD$, где n — число линз.

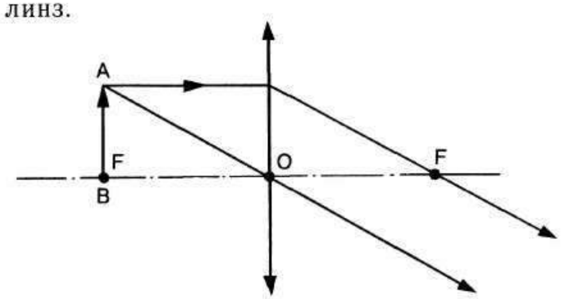


Рис. 4.23

Определим число очковых линз для первого случая:

$$\Gamma_1=1+D_0n_1D,$$
$$n_1=\frac{\Gamma_1-1}{D_0D}; \quad n_1=4.$$

Определим число очковых линз для второго случая:

$$\Gamma_2=D_0n_2D,$$
$$n_2=\frac{\Gamma}{D_0D}, \quad n_2=6. \quad \Gamma_1=\Gamma_2=\Gamma.$$

Ответ: $n_1=\frac{\Gamma-1}{D_0D}$, $n_1=4$;
$n_2=\frac{\Gamma}{D_0D}$, $n_2=6$.

4.30. Ход лучей, прошедших только через одну собирающую линзу, показан на рисунке 4.24. Для построения изображения

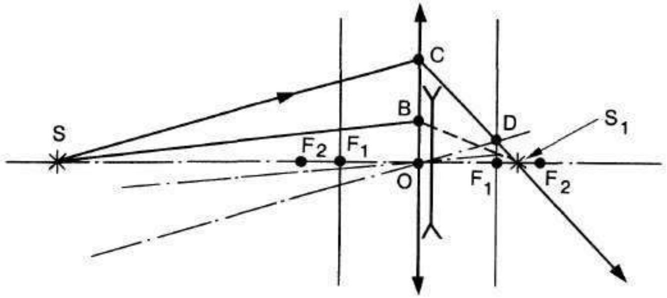


Рис. 4.24

источника воспользуемся свойством фокальной плоскости и лучей, параллельных побочной оптической оси: $OD \parallel CS$; DC, пересекаясь с главной оптической осью OS, образует изображение S_1. Для определения расстояния OS_1 воспользуемся формулой

тонкой линзы $\frac{1}{F_1}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}$, $f=\frac{dF_1}{d-F_1}$,

откуда $f=\frac{50\cdot 10}{40}=12{,}5$ см.

Оптическая сила системы, образованной собирающей и рассеивающей линзами, D_0 определяется как сумма оптических сил этих линз:

$$D_0=\frac{1}{F_1}-\frac{1}{F_2},\ D_0=\frac{10}{3}\approx 3{,}3\frac{1}{\text{м}}.$$

Оптическая сила положительная, следовательно, мы можем систему линз заменить одной линзой с оптической силой $D_0=3{,}3$ дптр. Построение изображения показано на рисунке 4.25. Определим расстояние f_1, воспользовавшись формулой тонкой линзы:

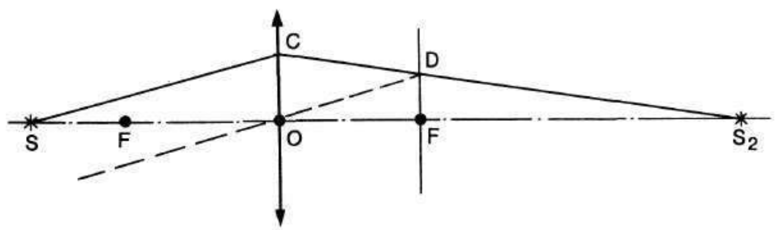


Рис. 4.25

$$D_0=\frac{1}{d}+\frac{1}{f_1},\ f_1=\frac{F_1F_2d}{(F_2-F_1)\,d-F_1F_2},$$
$$f_1=75 \text{ см}.$$

Расстояние между изображениями источника равно

$$l=f_1-f,\ l=62{,}5 \text{ см}.$$

Ответ: $l=\frac{F_1^2d^2}{(d-F_1)\,[(F_2-F_1)\,d-F_1F_2]}$, $l=62{,}5$ см.

4.31. В отсутствие зеркала линза давала бы изображение источника S_1 (рис. 4.26) на расстоянии f, которое можно опреде-

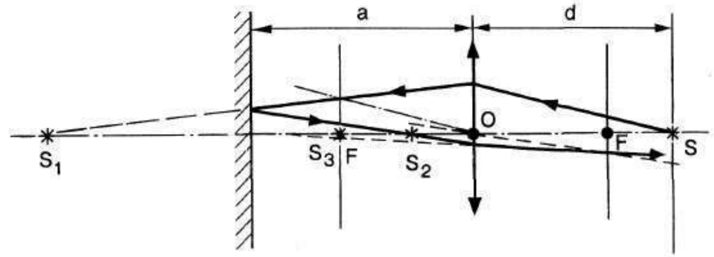


Рис. 4.26

лить из формулы тонкой линзы $\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}$; $f=\frac{dF}{d-F}$, $f=3F$.

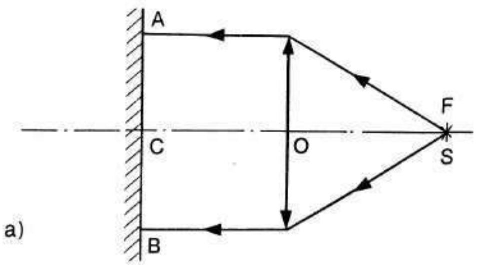
Так как $a<f$, то на зеркало падает сходящийся пучок световых лучей. После отражения от зеркала этот световой пучок собирается в точке S_2, расположенной симметрично плоскости зеркала, на расстоянии $f-a$ от зеркала справа от него. Это точка расположена слева от линзы на расстоянии $d_1=2a-f=\frac{1}{2}F$ и является действительным изображением источника. Световой пучок далее преломляется в линзе и образует еще одно изображение S_3 на расстоянии f_1 от линзы. По формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1},\ f_1=\frac{d_1F}{d_1-F},\ f_1=-F.$$

Изображение S_3 является мнимым и расположено слева от линзы. Расстояние между изображениями $l=|f_1|-d_1$, $l=\frac{1}{2}F$.

Ответ: $l=\frac{1}{2}F$, $l=25$ см.

4.32. На рисунке 4.27, *а* показано образование светлого пят-



а)

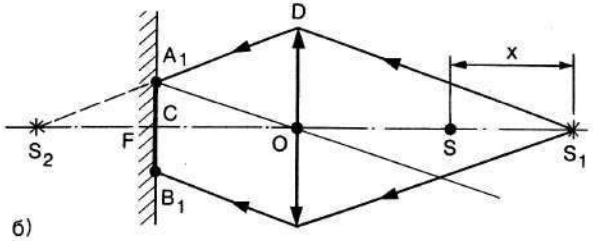


Рис. 4.27

на AB на экране при покоящемся источнике S. Так как источник находится в фокусе собирающей линзы, то после линзы лучи идут параллельно главной оптической оси. На рисунке 4.27, *б* показано образование светлого пятна от источника, удаленного на расстояние x от первоначального положения. $OA_1 \parallel DS_1$, дальнейшее построение основано на свойстве фокальной плоскости. Расстояние x определим из соотношения для равноускоренного движения без начальной скорости:

$$SS_1 = x,\ x = \frac{at^2}{2},\ t = \sqrt{\frac{2x}{a}}\ .$$

В силу симметричности пятна относительно оси S_1S_2 рассмотрим только половину CA_1. Запишем соотношения для подобия треугольников DOS_1 и A_1CS_2:

$$\frac{DO}{A_1C} = \frac{f}{f-F},\ n(f-F) = f,$$
$$f = OS_1,\ f - F = S_2C.$$

Расстояние f до изображения источника определим из формулы тонкой линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F+x} + \frac{1}{f},\ f = \frac{F(F+x)}{x}.$$

Преобразуем полученное выражение:

$$n\left(1 - \frac{F}{f}\right) = 1,\ n\left(1 - \frac{x}{F+x}\right) = 1,\ n\left(\frac{F}{F+x}\right) = 1.$$

Окончательно

$$x = F(n-1),\ t = \sqrt{\frac{2F(n-1)}{a}}\ .$$

Ответ: $t = \sqrt{\frac{2F(n-1)}{a}}$, $t = 0{,}5$ с.

4.33. Ход лучей в линзе и после нее показан на рисунке 4.28. Пусть на линзу падает световой луч, параллельный главной оптической оси. На преломляющей поверхности в точке

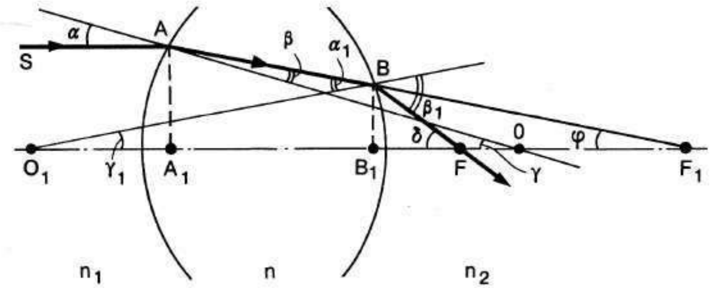


Рис. 4.28

A луч испытывает преломление. По закону преломления $\sin\alpha/\sin\beta = n/n_1$.

Учитывая малость углов, имеем $\alpha = \beta\ n/n_1$, $\beta = \alpha\frac{n_1}{n}$.

Если бы не было второй преломляющей поверхности, то луч распространялся бы по прямой ABF_1 и пересек бы главную оптическую ось в точке F_1; F_1 — фокус передней преломляющей поверхности. Однако луч падает на вторую преломляющую поверхность в точке B и, испытав преломление, пересекает главную оптическую ось в точке F, которая и является фокусом линзы. Так как линза тонкая, можно считать $AA_1 \approx BB_1$; будем также считать, что положения этих отрезков в пространстве практически совпадают. Применим закон преломления ко второй поверхности, имеем $\alpha_1 = \frac{n_2}{n}\beta_1$. Рассмотрим треугольники AOA_1 и AF_1A_1. $OA = R$ — радиус передней преломляющей поверхности, O — центр, $\gamma = \varphi + \beta$. Угол $\gamma = \frac{h}{R}$, где $h = AA_1 = BB_1$, угол $\varphi = \frac{h}{A_1F_1}$.

Определим отношение $\frac{h}{R} = \frac{h}{A_1F_1} + \alpha\frac{n_1}{n}$. Так как $\alpha = \gamma$, последнее выражение можно записать так:

$$\left(1 - \frac{n_1}{n}\right)\frac{1}{R} = \frac{1}{A_1F_1}. \qquad (1)$$

Отсюда находим фокусное расстояние передней преломляющей поверхности:

$$A_1F_1 = R\frac{n}{n-n_1}.$$

Рассмотрим треугольник O_1FB: $\beta_1 = \gamma_1 + \delta$,
так как O_1 — центр, а $O_1B = R$ — радиус задней преломляющей поверхности. Угол $\gamma_1 = \frac{h}{R}$, а угол $\delta = \frac{h}{B_1F}$. $B_1F = F$ — искомое расстояние линзы. Объединяя полученные соотношения для углов, получим:

$$\frac{n}{n_2}\alpha_1=\frac{h}{R}+\frac{h}{B_1F}. \qquad (2)$$

Из треугольника O_1BF_1 видно, что $\alpha_1=\gamma_1+\varphi$, следовательно, $\alpha_1=\frac{h}{R}+\frac{h}{A_1F_1}$.

Подставим это выражение в соотношение (2)

$$\left(\frac{n}{n_2}-1\right)\frac{1}{R}+\frac{n}{n_2}\frac{1}{A_1F_1}=\frac{1}{F}. \qquad (3)$$

Подставим (1) в (3), получим:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{R}\frac{2n-n_2-n_1}{n_2},$$

откуда

$$F=R\frac{n_2}{2n-n_1-n_2}.$$

Поменяем местами индексы у n_1 и n_2 в этом выражении, получим формулу для фокусного расстояния в случае, когда луч падает на линзу из среды с показателем преломления n_2

$$F=R\frac{n_1}{2n-n_1-n_2}.$$

Ответ: $F_1=R\frac{n_2}{2n-n_1-n_2}$, $F_1=48$ см;

$F_2=R\frac{n_1}{2n-n_1-n_2}$, $F_2=39$ см.

4.34. Ход луча показан на рисунке 4.29. Обозначим абсолютный показатель преломления воздуха через n_2. Пусть на линзу падает луч, параллельный главной оптической оси и проходящий на расстоянии h от нее. Будем рассматривать только параксиальные пучки, т. е. $h<<R$. Поэтому все углы малы и синусы и тангенсы углов могут быть заменены самими углами. Кроме

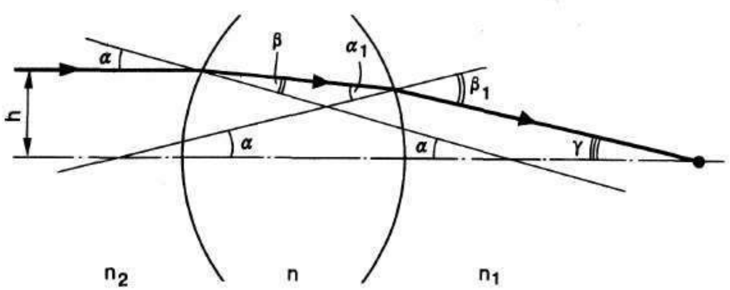


Рис. 4.29

того, так как линза тонкая, будем считать, что луч при прохождении линзы заметно не смещается, т. е. выходит из линзы в точке, расположенной на расстоянии h от оптической оси.

Угол падения на первую преломляющую поверхность $\alpha=\frac{h}{R}$, а угол, который составляет вышедший из линзы луч с главной оптической осью, $\gamma=h/F$, где F — фокусное расстояние линзы. Угол преломления на передней преломляющей поверхности $\beta=\alpha\frac{n_2}{n}$. Из рисунка видно, что

$$\beta+\alpha_1=2\alpha,\ \alpha_1=2\alpha-\beta,$$
$$\alpha_1=2\alpha-\alpha\frac{n_2}{n},$$
$$\alpha_1=\frac{2n-n_2}{n}\alpha.$$

Угол преломления на задней поверхности

$$\beta_1=\frac{n}{n_1}\alpha_1,\ \beta_1=\frac{2n-n_2}{n_1}\alpha;$$

так как $\gamma=\beta_1-\beta$, то $\gamma=(2n-n_1-n_2)\alpha/n_1$.
Объединяя полученные соотношения, получим:

$$F_1=R\frac{n_1}{2n-n_1-n_2}.$$

Выражение для заднего фокусного расстояния или для случая, когда лучи идут из среды с показателем преломления n_1, получим, заменив n_1 на n_2:

$$F_2=R\frac{n_2}{2n-n_1-n_2}.$$

Так как $n_2=1$, то можно записать:

$$F_1=R\frac{n_1}{2n-n_1-1},$$
$$F_2=R\frac{1}{2n-n_1-1}.$$

Ответ: $F_1=R\frac{n_1}{2n-n_1-1}$, $F_1\approx13{,}3$ см;

$F_2=R\frac{1}{2n-n_1-1}$, $F_2=10$ см.

4.35. Построение изображений источника показано на рисунке 4.30.

При прохождении светового потока через рассеивающую линзу образуется мнимое изображение S_1 источника S. По формуле тонкой линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}$ получим расстояние этого изображения от линзы: $f=-\frac{dF}{d+F}$, $f=-\frac{F}{2}$. Вышедший из линзы свето-

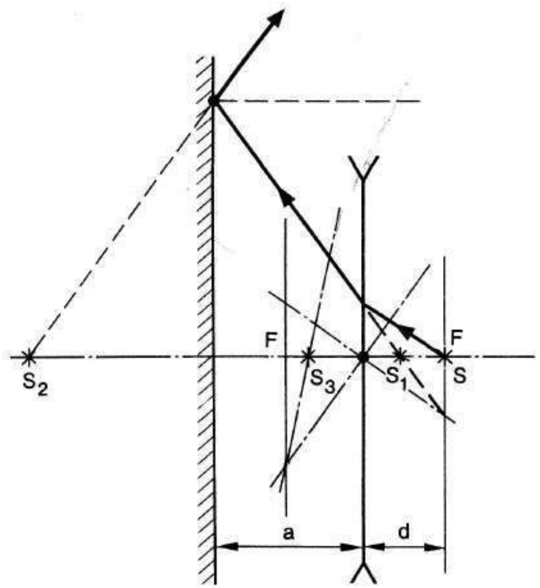


Рис. 4.30

вой пучок отражается от зеркала. Зеркало образует мнимое изображение S_2, расположенное слева от него на расстоянии $a+|f|=l$ от зеркала и на расстоянии $d_1=2a+|f|$ от линзы, $d_1=4{,}5\ F$. Отраженный от зеркала световой поток снова проходит через линзу и формирует мнимое изображение S_3 на расстоянии $f_1=\dfrac{-d_1F}{d_1+F}$ от нее, $f_1=-\dfrac{9}{11}F$.

Знак «минус» показывает, что изображение мнимое и находится слева от линзы, т. е. с той же стороны, что и мнимый источник, находящийся на расстоянии d_1.

Ответ: три мнимых изображения — одно справа от линзы на расстоянии $f=\dfrac{F}{2}$ и два слева от линзы на расстоянии $f_1=\dfrac{9}{11}F$, $d_1=4{,}5\ F$.

4.36. Ход лучей в трубе Галилея показан на рисунке 4.31. Луч SO, распространяющийся от достаточно удаленного предмета, входит в объектив вдоль побочной оптической оси под тем же углом γ к главной оптической оси, под которым этот удаленный предмет рассматривается невооруженным глазом. Другими словами, угол γ есть угловой размер предмета. Объектив формирует изображение AB предмета практически в своей фокальной плоскости. Луч OC попадает на рассеивающую линзу и рассеивается ею по направлению CS_1. Окуляр дает мнимое прямое по отношению к самому предмету, но обратное по отно-

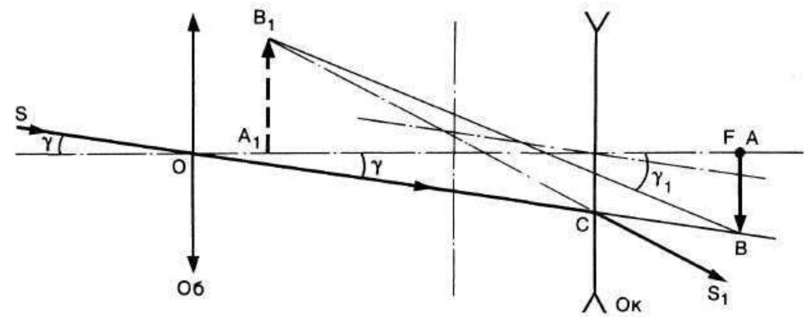


Рис. 4.31

шению к изображению от объектива изображение A_1B_1. Это изображение расположено практически на бесконечности и рассматривается глазом через окуляр под угом γ_1, γ_1 — угловой размер изображения. Следовательно, увеличение определяется как отношение угловых размеров: $\Gamma=\gamma_1/\gamma$.

Из рисунка видно, что $\gamma_1=\dfrac{AB}{F_{\text{ок}}}$ и $\gamma=\dfrac{AB}{F_{\text{об}}}$.

Увеличение равно $\Gamma=F_{\text{об}}/F_{\text{ок}}$.

Ответ: $\Gamma=\dfrac{F_{\text{об}}}{F_{\text{ок}}}$, $\Gamma=12{,}5$.

4.37. Ход лучей в трубе Кеплера показан на рисунке 4.32. Рассматриваемый через лупу предмет обычно очень уда-

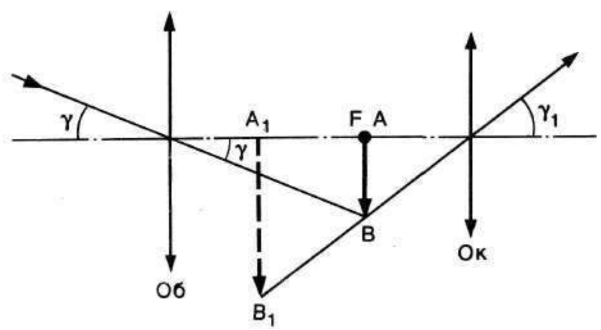


Рис. 4.32

лен, объектив формирует изображение практически в своей фокальной плоскости. Изображение действительное и перевернутое. γ — угол, под которым виден предмет невооруженным глазом, $\gamma=\dfrac{AB}{F_{\text{об}}}$. Изображение, полученное с помощью объектива, рассматривается в окуляр как в лупу. Окуляр формирует мнимое прямое по отношению к изображению AB изображение A_1B_1. Следовательно, изображение удаленного предмета в трубе Кеплера получается мнимым и перевернутым. Угловые размеры изображения AB, рассматриваемого в окуляр, $\gamma_1=\frac{AB}{F_{ок}}$. Увеличение трубы Кеплера $\Gamma=\frac{\gamma_1}{\gamma}$, $\Gamma=\frac{F_{об}}{F_{ок}}$.

Ответ: $\Gamma=\frac{F_{об}}{F_{ок}}$, $\Gamma=16$.

4.38. Установление трубы на бесконечность означает, что лучи, падающие от бесконечно удаленного предмета, т. е. падающие параллельным пучком, выходили бы из системы также параллельным пучком. Ход лучей в этом случае показан на рисунке 4.33. Это возможно только в том случае, когда второй фокус объектива совпадает с первым фокусом окуляра.

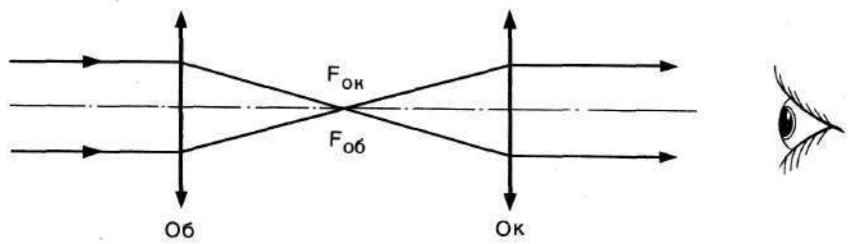


Рис. 4.33

Если же предмет находится не в бесконечности, а на некотором расстоянии d от объектива, то окуляр надо установить так, чтобы изображение, формируемое объективом, также попадало в передний фокус окуляра. Объектив и окуляр должны быть при этом расположены так, чтобы между их фокусами было некоторое расстояние. Ход лучей в этом случае показан на рисунке 4.34. Окуляр и объектив должны быть дополнительно раздвину-

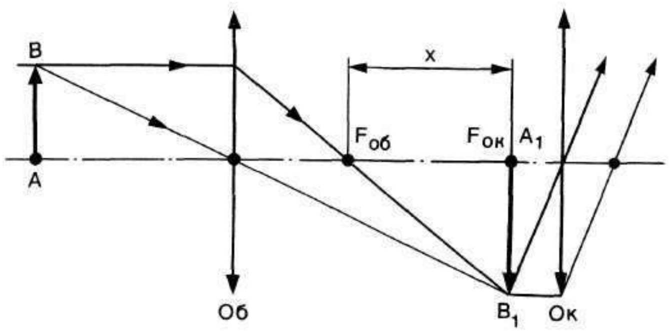


Рис. 4.34

ты на расстояние $x=F_{об}F_{ок}$. По формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{F_{об}}=\frac{1}{d}+\frac{1}{d'},$$

где $d'=F_{об}+x$ — расстояние от объектива до изображения. Находим:

$$\frac{1}{F_{об}}=\frac{1}{d}+\frac{1}{F_{об}+x},$$

откуда $x=F_{об}^2/(d-F_{об})$.

Окуляр и объектив надо раздвинуть на расстояние $x=2$ см.

Ответ: $x=\frac{F_{об}^2}{d-F_{об}}$, $x=2$ см.

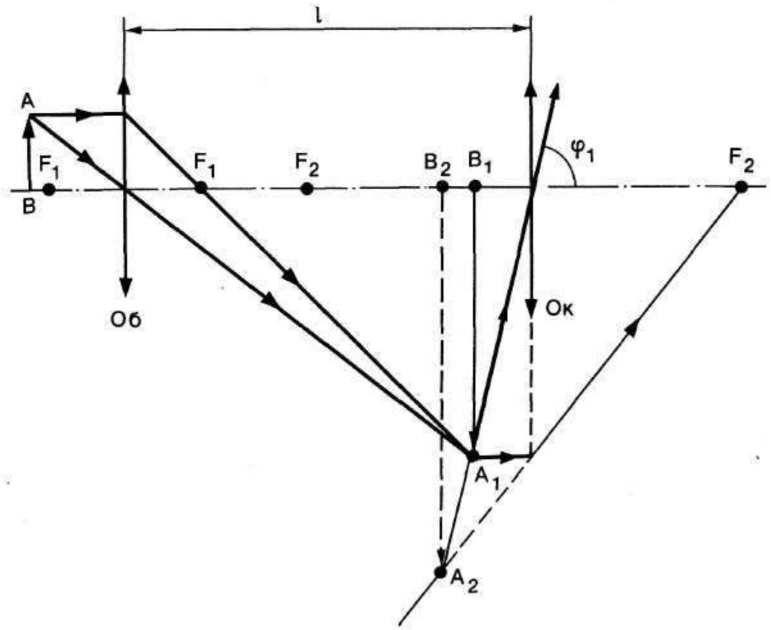


Рис. 4.35

4.39. Ход лучей в микроскопе показан на рисунке 4.35. Объектив дает изображение A_1B_1 предмета AB, которое рассматривается в окуляр как в лупу.

Максимальное увеличение микроскопа достигается в том случае, если изображение A_1B_1, сформированное объективом, расположено практически в фокальной плоскости окуляра. Запишем формулу тонкой линзы для объектива ($f=l-F_2$):

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{l-F_2}=\frac{1}{F_1},$$

откуда

$$d=\frac{F_1(l-F_2)}{l-F_2-F_1}. \qquad (1)$$

Увеличение объектива $\Gamma=\frac{l-F_2}{d}$.

Подставим в это выражение формулу (1), получим:

$$\Gamma=\frac{l-F_1-F_2}{F_1}. \qquad (2)$$

Угловой размер изображения A_2B_2, рассматриваемого в окуляр, равен $\varphi_1=\frac{A_2B_2}{F_2}$.

Пусть (A_2B_2) мин $=\delta_1$, тогда

$$\varphi_1=\frac{\delta_1}{F}. \qquad (3)$$

Разрешающая способность микроскопа

$$\delta=\frac{\delta_1}{\Gamma}. \qquad (4)$$

Подставив (2), (3) в (4), получим:

$$\delta=\frac{\varphi_1F_1F_2}{l-F_1-F_2}.$$

Учитывая, что $\varphi_1=1'=(1/(60\cdot 57{,}3))$ радиан, получим:

$$\delta\approx 7\cdot 10^{-7}\ \text{м}.$$

Ответ: $\delta=\varphi_1\frac{F_1F_2}{l-F_1-F_2}$, $\delta\approx 7\cdot 10^{-7}$ м.

4.40. Для того чтобы изображение являлось продолжением предмета, предмет должен быть расположен на расстоянии $s=2F_0$ от зеркала, где F_0 — фокусное расстояние системы линза — зеркало. Оптическая сила системы равна сумме оптических сил составляющих, т. е.

$$\frac{1}{F_0}=\frac{2}{F}+D,$$

где D — оптическая сила зеркала (в нашем случае плоского зеркала: $D=0$), $\frac{2}{F}$ — оптическая сила линзы. Множитель 2 появляется из-за того, что свет дважды проходит через линзу. Получим $F_0=\frac{F}{2}$, $s=F$.

Этот результат можно получить также из следующих рассуждений. Если точечный источник света поместить в фокусе линзы,

то свет, пройдя через линзу, будет распространяться параллельным пучком перпендикулярно зеркалу и, отразившись от зеркала и пройдя линзу вторично, вновь соберется в ее фокусе, т. е. изображение совпадает с источником.

Ответ: $s=F$.

4.41. Будем рассматривать эту систему линз как систему из трех линз: двух стеклянных — собирающей и рассеивающей — и водяной линзы. Оптическая сила этой системы

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}+\frac{1}{F_3}.$$

Оптическая сила собирающей стеклянной линзы $D_1=\frac{1}{F_1}$,

$$D_1=\frac{2(n_1-1)}{R_1}.$$

Оптическая сила рассеивающей линзы

$$\frac{1}{F_2}=-\frac{2(n_1-1)}{R_2}.$$

Оптическая сила водяной линзы

$$\frac{1}{F_3}=(n_2-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right).$$

Окончательно получим:

$$F=\frac{R_1R_2}{(2n_1-n_2-1)(R_2-R_1)}.$$

Этот результат можно получить, рассматривая преломление параллельного пучка на всех четырех преломляющих поверхностях, как это делалось в задачах 4.33. и 4.34.

Ответ: $F=\frac{R_1R_2}{(2n_1-n_2-1)(R_2-R_1)}$, $F\approx 90$ см.

4.42. При прохождении через призму красный луч отклоняется на угол $\alpha_к=(n_к-1)\alpha$, а зеленый — на угол $\alpha_з=(n_з-1)\alpha$, где $n_к$ и $n_з$ — показатели преломления для красного и зеленого света. Тогда

$$\alpha_з-\alpha_к=(n_з-n_к)\alpha=\Delta n\alpha.$$

Расстояние между изображениями

$$l=F(\alpha_з-\alpha_к),\quad l=\Delta n\alpha F,$$

откуда находим $\Delta n=\frac{l}{\alpha F}$.

Ответ: $\Delta n=\frac{l}{\alpha F}$, $\Delta n\approx 0{,}016$.

4.43. Оптическая сила системы из двух линз для красного света

$$\frac{1}{F_к}=\frac{2(n_{1к}-1)}{R_1}-\frac{2(n_{2к}-1)}{R_2},$$

для синего света

$$\frac{1}{F_с}=\frac{2(n_{1с}-1)}{R_1}-\frac{2(n_{2с}-1)}{R_2}.$$

Так как хроматическая аберрация устранена, оптические силы равны, то

$$F_к=F_с,$$

откуда находим:

$$\frac{2(n_{1к}-1)}{R_1}-\frac{2(n_{2к}-1)}{R_2}=\frac{2(n_{1с}-1)}{R_1}-\frac{2(n_{2с}-1)}{R_2}.$$

$$\Delta n_2=(n_{1с}-n_{1к})\frac{R_2}{R_1}.$$

Ответ: $\Delta n_2=(n_{1с}-n_{1к})\frac{R_2}{R_1}$, $\Delta n_2=0{,}04$.

4.44. Работа выхода электронов из металла определяется соотношением $A\leqslant hc/\lambda$, где λ — наибольшая длина волны, при которой еще наблюдается фотоэффект. Если энергия квантов больше работы выхода, то фотоэффект наблюдается.

$$hc/\lambda_1=6\cdot10^{-19}\ \text{Дж},$$
$$hc/\lambda_2=9{,}9\cdot10^{-19}\ \text{Дж}.$$

В обоих случаях фотоэффект наблюдается.

Ответ: $hc/\lambda_1=6\cdot10^{-19}$ Дж,
$hc/\lambda_2=9{,}9\cdot10^{-19}$ Дж.

Фотоэффект наблюдается.

4.45. Красная граница фотоэффекта определяется из формулы $\frac{hc}{\lambda_{кр}}=A$: $\lambda_{кр}=\frac{hc}{A}$.

Ответ: $\lambda_{кр}=\frac{hc}{A}$, $\lambda\approx540$ нм.

4.46. Электроны, вырываемые светом из металла, полностью задерживаются напряжением U, следовательно, можно записать:

$$\frac{mv^2}{2}=eU,$$

т. е. кинетическая энергия электронов равна потенциальной энергии электронов в задерживающем электростатическом поле. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu=A+\frac{mv^2}{2}\ \text{или}\ h\nu=A+eU,$$

где A — работа выхода электронов из металла.

Запишем уравнения для двух частот:

$$h\nu_1=A+eU_1,$$
$$h\nu_2=A+eU_2.$$

Вычтем одно уравнение из другого:

$$h=\frac{e(U_1-U_2)}{\nu_1-\nu_2}.$$

Ответ: $h=\frac{e(U_1-U_2)}{\nu_1-\nu_2}$, $h\approx6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с.

4.47. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта по двум результатам наблюдения запишем:

$$h\frac{c}{\lambda_1}=A+eU_1,$$

$$h\frac{c}{\lambda_2}=A+eU_2,\ \text{где}\ A=h\nu_{кр}.$$

Вычитая одно уравнение из другого, получим:

$$h=\frac{e}{c}(U_1-U_2)\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

Для нахождения красной границы фотоэффекта, т. е. наибольшей длины волны, при которой возможно наблюдение фотоэффекта, запишем уравнения в следующем виде:

$$h\frac{c}{\lambda_1}-\frac{hc}{\lambda_{кр}}=eU_1,\ h\frac{c}{\lambda_2}-\frac{hc}{\lambda_{кр}}=eU_2.$$

Разделим одно уравнение на другое, получим:

$$\lambda_{кр}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1U_1-\lambda_2U_2}(U_1-U_2).$$

Ответ: $h=\frac{e}{c}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(U_1-U_2)$, $h=6{,}61\cdot10^{-34}$ Дж/с;
$\lambda_{кр}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1U_1-\lambda_2U_2}(U_1-U_2)$, $\lambda_{кр}\approx0{,}65$ мкм.

4.48. Ток насыщения определяется числом фотоэлектронов, выбиваемых с поверхности катода в единицу времени. Общее число фотоэлектронов, покидающих катод в единицу времени, пропорционально числу фотонов, падающих на эту поверхность. Это число фотонов определяется отношением энергии потока фотонов к энергии одного фотона. Энергия в единицу времени определяется мощностью. Следовательно, сила фототока насыщения

$$I=\frac{Ne}{h\nu},$$

где N — мощность лазера, $h\nu$ — энергия фотона, ν — частота кванта, h — постоянная Планка.

Уравнение Эйнштейна $h\nu=A+eU$, еде e — заряд электрона, U — задерживающий потенциал.

Работу выхода запишем через красную границу фотоэффекта:

$$A=\frac{hc}{\lambda_{кр}}.$$

Окончательно сила тока насыщения

$$I=\frac{Ne}{\frac{hc}{\lambda_{кр}}+eU},\quad I=\frac{eN\lambda_{кр}}{eU\lambda_{кр}+hc}.$$

Ответ: $I=\frac{eN\lambda_{кр}}{eU\lambda_{кр}+hc}$, $I=0{,}5$ мА.

4.49. Фотоэффект прекратится, т. е. электроны больше не будут «покидать» шарик, после того как поле шарика будет удерживать электроны, другими словами, кинетическая энергия электронов, выбиваемых светом с поверхности шарика, будет меньше потенциальной энергии электронов в поле шарика:

$$eU\geqslant\frac{mv^2}{2}.$$

$$h\frac{c}{\lambda}=A+\frac{mv^2}{2},\quad h\frac{c}{\lambda}=A+eU.$$

Напряжение на шаре $U=\frac{q}{C}$, где $C=4\pi\varepsilon_0R$ — емкость шара, $q=en$, n — число электронов, покинувших шарик.

$$U=\frac{en}{4\pi\varepsilon_0R}=\frac{hc-A\lambda}{e\lambda},\quad n=\frac{(hc-A\lambda)\,4\pi\varepsilon_0R}{e^2\lambda}.$$

Ответ: $n=\frac{(hc-A\lambda)\,4\pi\varepsilon_0R}{e^2\lambda}$, $n=2{,}75\cdot10^7$ электронов.

ОТВЕТЫ

1.1. $a=2B=-4$ м/с^2; $l=0{,}5$ м; рис. 1.1.
1.2. $l_1=16$ м, $l_2=32$ м, $l_3=10$ м; рис. 1.2, 1.3, 1.4.
1.3. Рис. 1.5.
1.4. $l=v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}\approx10{,}6$ м.
1.5. $H=\frac{gT^2}{8}=176{,}4$ м.
1.6. $t=\frac{v_0+\sqrt{v_0^2-2gH}}{g}$, $t_1=0{,}2$ с, $t_2=2{,}8$ с; $E_п=mgH=5{,}9$ Дж; $E=\frac{mv_0^2}{2}=22{,}5$ Дж.
1.7. $T=\frac{n+1}{2}t_1=4$ с, $H=\frac{g(n+1)^2}{8}t_1^2=78{,}4$ м.
1.8. $T=\frac{3n-1}{2(n-1)}=2{,}5$ с, $H=\frac{g}{8}\left(\frac{3n-1}{n-1}\right)^2\approx30{,}6$ м.
1.9. $t=\frac{v_0}{g}+\frac{\tau}{2}=2{,}5$ с, $H=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g\tau^2}{8}=18{,}75$ м.
1.10. $L=4E_п\,\mathrm{ctg}\,(\arccos\frac{1}{2})/mg=5{,}7$ м, $H=\frac{E_п}{mg}=2{,}4$ м.
1.11. $t=\frac{v_0\sin(\beta-\alpha)}{g\cos\beta}=2$ с, $\Delta E_п=\frac{mv_0^2}{2}\left(1-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}\right)=-160$ Дж.
1.12. $H=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}=5$ м, $\Delta p=2mv_0\sin\alpha=10$ кг·м/с.
1.13. $t=\sqrt{\frac{2l}{a}}\approx85$ с, $s=v\sqrt{\frac{2l}{a}}\approx170$ м.
1.14. $v_0=\sqrt{\frac{gs^2}{2h}-v^2}=8{,}7$ м/с.
1.15. $\tau=\frac{v_0}{g}-\frac{l}{v_1}\pm\sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2+\left(\frac{l}{v_1}\right)^2-\frac{2H}{g}}$, $\tau_1=0{,}6$ с, $\tau_2=3{,}4$ с.
1.16. $t=2\frac{\sqrt{v^2+la}}{a}=47{,}6$ с.
1.17. $s=\frac{Hv_1\cos\alpha}{v_1\sin\alpha+\sqrt{v_2^2-v_1^2\cos^2\alpha}}$, $s\approx103{,}5$ м, $s_1\approx1153$ м.
1.18. $s=\frac{l(v_1+v_2\sin\alpha)\sqrt{v_1^2+v_р^2}}{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\sin\alpha}=135$ м.
1.19. $t_1=\frac{l}{2v_0}\left(1-\sqrt{1-4\frac{v_рh}{al^2}}\right)=4$ с, $t_2=\frac{l}{v_р}\sqrt{1-4\frac{v_рh}{al^2}}=32$ с.
1.20. $\alpha=\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{2gH}}{u-v}\right)=60°$.
1.21. $H=\frac{2h}{\sin^2\alpha}=0{,}4$ м.

1.22. $T=\rho g l\dfrac{S_1S_2}{S_1-S_2}\approx 5{,}55$ Н.

1.23. $F_c=\dfrac{\pi\rho g h^2}{3\cos\alpha}(3R-h\operatorname{tg}\alpha)=29{,}2$ Н.

1.24. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\rho_2-\rho}{\rho-\rho_1}=2,\ \dfrac{T}{mg}=\dfrac{(\rho-\rho_1)(\rho_2-\rho)}{\rho(\rho_2-\rho_1)}\approx 0{,}267.$

1.25. $a=g\dfrac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\approx 2$ м/с^2, $T=g\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}=1{,}2H,$

$F_д=g\dfrac{2m_1m_2}{m_1+m_2}=2{,}4$ Н.

1.26. $f_д=\dfrac{6Mmg}{6M+m}\approx 1{,}8$ Н.

1.27. $a=\dfrac{At}{m}=5$ м/с^2, $v=\dfrac{At^2}{2m}=5$ м/с.

1.28. $\mu=\dfrac{F\cos\alpha}{mg+F\sin\alpha}\approx 0{,}36.$

1.29. $a=\dfrac{F\cos\alpha-\mu(mg-F\sin\alpha)}{m}\approx 0{,}7$ м/с^2,

$A=\dfrac{F\cos\alpha}{2m}t^2[F\cos\alpha-\mu(mg-F\sin\alpha)]\approx 44$ кДж.

1.30. $F=\dfrac{2M+m}{2(M+m)}[2T_{\max}+\mu g(2M+m)].$

1.31. $T=F\left(1-\dfrac{b}{l}\right).$

1.32. $F_{торм}=m\left(\dfrac{v_0^2-v^2}{2s}-\mu g\right)=10$ Н.

1.33. $\mu_0=\dfrac{\mu-\operatorname{tg}\alpha}{1+\mu\operatorname{tg}\alpha}.$

1.34. $\dfrac{1+\mu^2}{2}\sin 2\alpha-\mu\leqslant\dfrac{m}{M}\leqslant\mu+\dfrac{1+\mu^2}{2}\sin 2\alpha,\ 0{,}32\leqslant\dfrac{m}{M}\leqslant 0{,}72.$

1.35. $a=\dfrac{g}{2}\dfrac{\sin 2\alpha(m_1-m_2)}{M+m_1\sin^2\alpha+m_2\cos^2\alpha}\approx 0{,}8$ м/с^2.

1.36. $v=\sqrt{\dfrac{R(mg-N)}{m}}\approx 6{,}3$ м/с.

1.37. $v_0=\sqrt{gR}\approx 62{,}6$ м/с, $v=\sqrt{5gR}\approx 140$ м/с.

1.38. $\alpha=\arccos\dfrac{T_{\max}}{3mg}=60°.$

1.39. $\Delta T_{I}=2mg=4H,\ \Delta T_{II}=6mg=12$ Н.

1.40. $m_{I}=\dfrac{\Delta T}{2g}=0{,}6$ кг, $m_{II}=\dfrac{\Delta T}{6g}=0{,}2$ кг.

1.41. $\omega=\sqrt{2g\dfrac{R-r}{R^2+r^2}(1-\cos\theta)}=4{,}4$ с$^{-1}$.

1.42. $\beta=\arccos\left(\cos\alpha-\dfrac{\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}{2}\right)\approx 44°.$

1.43. $\sqrt{\dfrac{(2M+m(1+\operatorname{tg}\alpha))g}{ma(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}}\leqslant\omega\leqslant\sqrt{\dfrac{(2M+m(1-\operatorname{tg}\alpha))g}{ma(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)}},$

$16{,}4$ с$^{-1}\leqslant\omega\leqslant 20$ с$^{-1}$.

1.44. $v=\sqrt{\dfrac{2\sigma}{\rho}}\approx 250$ м/с.

1.45. $\omega=\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho}}=500$ с$^{-1}$.

1.46. $v_0\leqslant\sqrt{\dfrac{l}{2m}(T_{\max}-3mg)}=10{,}5$ м/с.

1.47. $a=\mu g\dfrac{R\cos\alpha-r}{r+\mu R\sin\alpha}\approx 1{,}2$ м/с^2.

1.48. $\mu=\dfrac{gR}{v^2}=0{,}2.$

1.49. $l=2R\left(1-\left(\dfrac{v^2}{gR}\right)^2\right)^{3/2}\approx 1{,}2$ м.

1.50. $H=\dfrac{E_0}{mg}=20{,}4$ м, $H_1=\dfrac{E_0}{2mg}=10{,}2$ м.

1.51. $s=\dfrac{v_0^2}{2\mu g}-l\approx 2{,}76$ м.

1.52. $v=\dfrac{mv_0}{M}\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 0{,}175$ м/с.

1.53. $\alpha=\arccos\left(1-\dfrac{mE_0}{(m+M)^2gl}\right)\approx 84°,\ T'=(m+M)\left(g+\dfrac{2Em}{(m+M)^2l}\right)\approx$

$\approx 2{,}2$ Н.

1.54. $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\approx 26{,}6°.$

1.55. $h=\dfrac{H-\mu(2b+H\operatorname{ctg}\alpha)}{1+\mu\operatorname{ctg}\alpha}=8{,}3$ см.

1.56. $l=3v_0\left(\dfrac{2H}{gt_0}-t_0+\sqrt{\left(\dfrac{2H}{gt_0}\right)^2+t_0^2-\dfrac{2H}{g}}\right)\approx 12$ км.

1.57. $v_1=\dfrac{\dfrac{m}{M}v_0}{\sqrt{1+\dfrac{m}{M}}}\approx 2{,}25$ м/с, $\quad v_2=\dfrac{v_0}{\sqrt{1+\dfrac{m}{M}}}=4$ м/с,

$\alpha=2\arccos\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{m}{M}}\approx 102{,}6°.$

1.58. $u=\dfrac{2v_0\cos\alpha}{1+a}=3{,}5$ м/с, $a=\dfrac{M}{m}$; $v=v_0\sqrt{1-\dfrac{a4\cos^2\alpha}{(1+a)^2}}=7{,}9$ м/с,

$\beta=\arcsin\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\dfrac{4a\cos^2\alpha}{(1+a)^2}}}\approx 63{,}5°.$

1.59. $s=2\dfrac{v_0^2}{g}\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha-\eta}\approx 1{,}96$ м.

1.60. $s=\dfrac{v_0^2}{2g}\dfrac{M}{(\mu_1+\mu_2)(m+M)}\approx 1{,}7$ см.

1.61. $\beta=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\alpha\dfrac{2n\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+n-2n\cos^2\alpha}\right)\approx 60°.$

1.62. $s=\dfrac{2mv_0^2\sin 2\alpha}{g(m+M)}\approx 3{,}4$ см.

1.63. $\mu=\dfrac{Mv_0^2}{4gs(2M+m)}\approx 0{,}2.$

1.64. $m_1=m_2\sin\alpha+\mu(m_2-m_3)\cos\alpha\approx 443$ г.

1.65. $L \leqslant l\sqrt{1+\mu^2} = 3{,}06$ м.

1.66. $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{2ml+Ma}{a(2m+M)} \approx 41°$, $\mu \geqslant \dfrac{2ml+Ma}{a(2m+M)} = 0{,}875$. Равновесие неустойчивое.

1.67. $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{m_2}{m_1} = 2$, $F = (m_2 - m_1)\mu g = 0{,}98$ Н.

1.68. $v = \dfrac{k_2 a}{\sqrt{m(k_1+k_2)}} \approx 1$ м/с, $A = \dfrac{ak_2}{k_1+k_2} = 2{,}5$ см.

1.69. $A = mg/k \approx 2{,}5$ см, $v = g\sqrt{\dfrac{m}{k}} \approx 0{,}49$ м/с.

1.70. $x = \dfrac{2E}{F}\sin(2\pi\nu t + \varphi_0)$, $x = 0{,}04\sin\left(2\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

1.71 . $E = \dfrac{l}{2}(F - mg) = 0{,}05$ Дж.

1.72. $x_0 = (v_1 + v_2)\sqrt{\dfrac{m}{2k}} = 2{,}5$ см.

2.1. $\nu = \dfrac{1}{6}\dfrac{N_A\rho}{M}\sqrt{\dfrac{3RT}{M}} = 6\cdot10^{27}$ м$^{-2}$с$^{-1}$.

2.2. $\nu = \dfrac{1}{6}p\sqrt{\dfrac{3N_A}{MkT}} = 5{,}5\cdot10^{27}$ м$^{-2}$ с$^{-1}$.

2.3. $\nu_1 = \dfrac{1}{6}p\dfrac{M_2}{M_1+M_2}\sqrt{\dfrac{3N_A}{M_1kT}} = 1{,}1\cdot10^{27}$ м$^{-2}$ с$^{-1}$, $\nu_2 = \dfrac{1}{6}p\dfrac{M_1}{M_1+M_2}\times$
$\times\sqrt{\dfrac{3N_A}{M_2kT}} = 0{,}9\cdot10^{27}$ м$^{-2}$ с$^{-1}$.

2.4. $v = \dfrac{p}{\rho}\sqrt{\dfrac{M}{2EN_A}} = 9\cdot10^{-8}$ м/с.

2.5. C_4H_{10}.

2.6. $\Delta m = m_1\dfrac{\Delta T}{T_1+\Delta T} = 4$ кг.

2.7. $V_2 = \dfrac{p_1V_1T_0}{p_0T_1} = 9{,}5.$ л.

2.8. $p_2 = \dfrac{p_1V_1}{V_1+V_2} = 6\cdot10^4$ Па.

2.9. $p_1 = \Delta p\dfrac{V_2}{V_1-V_2} = 120$ кПа.

2.10. $p = \dfrac{p_1V_1+p_2V_2}{V_1+V_2} = 0{,}9\cdot10^5$ Па.

2.11. $d = \dfrac{V(n-1)}{S(n+1)} = 5$ см.

2.12. $d = \dfrac{V_0\Delta T}{S(2T_0+\Delta T)} = 1$ см.

2.13. $a = b/\left(1+\dfrac{m_2}{m_1}\right) = 3$ см.

2.14. $\dfrac{V_0}{V} = \dfrac{1}{f} = 2{,}5$.

2.15. $f_2 = f_1\dfrac{p_{1н}T_2}{p_{2н}T_1} = 29\%$.

2.16. $p = \dfrac{mRT}{MV} = 3{,}9$ кПа.

2.17. $p = \dfrac{mRT}{MV} = 2{,}6$ кПа.

2.18. $T = T_1 + (T_2 - T_1)\dfrac{\rho_1(nf-1)}{\rho_2-\rho_1} = 285$ К, $t = 12°$ С.

2.19. $A = \dfrac{m}{M}R\Delta T = 8{,}3$ Дж.

2.20. $A = \dfrac{m}{M}RT_1(n-1) = 12{,}5$ кДж.

2.21. $A = \dfrac{m}{M}RT\dfrac{n-1}{n} = 1{,}44$ кДж.

2.22. $A = \dfrac{p_0V_0}{T_0}\left(\dfrac{T_3}{V_3} - \dfrac{T_1}{V_1}\right)(V_3 - V_1) = 44$ Дж.

2.23. $A = (p_3 - p_1)\dfrac{p_0V_0}{T_0}\left(\dfrac{T_3}{p_3} - \dfrac{T_1}{p_1}\right) = 79$ Дж.

2.24. $Q_2 = Q_1 - (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = 3600$ Дж.

2.25. $Q = m\Delta T\left(c_V + \dfrac{R}{M}\right) = 110$ Дж.

2.26. $Q = c_p\dfrac{AM}{R} = 1400$ Дж.

2.27. $p = \dfrac{\rho R}{2}\cdot\dfrac{M_1+M_2}{M_1M_2}\cdot\dfrac{c_аT_1+c_вT_2}{c_а+c_в} = 7{,}7\cdot10^5$ Па.

2.28. $T = T_1T_2\dfrac{p_1V_1+p_2V_2}{p_1V_1T_2+p_2V_2T_1} = 270$ К, $p = \dfrac{p_1V_1+p_2V_2}{V_1+V_2} = 1{,}3\cdot10^5$ Па.

2.29. $F = \left(p_0V_0 + \dfrac{AR}{2Mc_V}\right)\dfrac{2hS^2}{V_0^2 - h^2S^2} = 640$ Н.

2.30. $Q = (p_2^2 - p_1^2)\dfrac{S^2}{2k} + \dfrac{3}{2}(p_2 - p_1)\left(V_1 + p_2\dfrac{S^2}{k}\right) = 900$ Дж.

2.31. $A = \dfrac{\eta Q}{1-\eta} = 225$ Дж.

2.32. $m_в = \dfrac{rpVM}{RT_1c(T_1-T)} = 3{,}2$ кг.

2.33. $Q = A\left(1 + \dfrac{rM}{RT}\right) = 10^3$ Дж.

2.34. $c_1 = \dfrac{c_2m_2(t_2-t) - c(t-t_1)}{m_1(t-t_1)} = 2{,}18$ кДж/кг·К.

2.35. $m_2 = \dfrac{c_1m_1(T_1-T_2)}{r} = 42$ г.

2.36. $m_2 = \dfrac{m_1c(t-t_1)}{\lambda} = 125$ г.

2.37. $t = 0°$ С, $m_в = m_1 - \dfrac{c_2m_2(t-t_2) - c_1m_1(t_1-t)}{\lambda} = 287{,}5$ г.

2.38. $m_п = \dfrac{p(V\rho_1\rho_2 - m_1\rho_2 - m_2\rho_1)}{\rho_2(RT\rho_1 - pM)}$ $M = 56$ г, $t_2 = t + \dfrac{\lambda m_1}{c_2m_2} +$
$+\dfrac{c_1m_1(t-t_1)}{c_2m_2} + \dfrac{m_пr}{c_2m_2} = 870°$ С.

2.39. $t_2 = 100°$ С.

2.40. $m = \dfrac{Q - N\tau}{c_в(t_1-t) + \lambda + c_л(t-t_2)} = 89$ г.

2.41. $v=\frac{NRT}{rMpS}=7{,}6$ м/с.

2.42. $\tau=\frac{1}{\eta N}\left(m\lambda+cm(t-t_0)+\frac{pVM}{RT}r\right)=120$ с.

2.43. $h=\frac{RT(N\tau-cm(t-t_0))}{rMpS}=2{,}5$ м.

2.44. $h=\frac{m_2c_2(l_2-t)-m_1c_1(t-t_1)}{rMpS}RT=0{,}63$ м.

2.45. $Q=\frac{mv^2}{2}=62{,}5$ Дж.

2.46. $\Delta t=\frac{g\tau}{0{,}3c}\sqrt{\frac{\rho gR}{2}}=0{,}25°$ С.

2.47. $S=\sqrt{\frac{2h(v_0^2-2c\Delta T)}{g}}=284$ м.

2.48. $\Delta T=\frac{m_1m_2(v_2-v_1)^2}{c(m_1+m_2)^2}=1{,}8\cdot10^{-3}$ К.

2.49. $\Delta T=\frac{m_1m_2(v_1^2+v_2^2)}{2c(m_1+m_2)^2}=2{,}4\cdot10^{-2}$ К.

2.50. $\Delta T=\frac{nm_2v_1^2}{2c(m_1+m_2)}=8{,}5$ К.

2.51. $\Delta T=\frac{8M\eta}{c\rho d^2h}=38$ К.

2.52. $\Delta T=\frac{\mu(g-\omega^2l\cos\alpha)l\omega t\sin\alpha}{c}=0{,}16$ К.

2.53. $\Delta T=T_0\frac{g}{p_0}[\rho(H_1-H)+4m/\pi d^2]=5{,}5$ К.

3.1. $r_1=2r$ или $\varepsilon_2=4\varepsilon_1$.

3.2. $T=\frac{mg}{\varepsilon}\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha=3{,}5\cdot10^{-4}$ Н.

3.3. $q=-\frac{Q}{\sqrt{3}}$, равновесие неустойчивое, заряд q надо поместить в центр треугольника.

3.4. $v=\frac{e}{2}\sqrt{\frac{k(4z-1)}{mr}}=3{,}8\cdot10^6$ м/с.

3.5. $\omega=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{3kq(\sqrt{3}Q-q)}{ma}}=0{,}62$ с$^{-1}$.

3.6. $m=\frac{kQ^2\cos\alpha}{\sqrt{3}\,l^2(g-\omega^2l\cos\alpha)\sin^3\alpha}=4\cdot10^{-5}$ кг.

3.7. $R=2\sqrt{3}\frac{kQ^2}{a^2}=7{,}8\cdot10^{-5}$ Н, направлена к заряду q, $q=\frac{Q}{\sqrt{3}}=$ $=5{,}8$ нКл, $\Delta T=2\frac{kQ^2}{a^2}=4{,}5\cdot10^{-5}$ Н.

3.8. $T=k\frac{Qq}{2\pi R^2}$.

3.9. $A_1=q(\varphi_1-\varphi_2)$, $A_1=10^{-5}$ Дж; $A_2=q(\varphi_3-\varphi_4)$, $A_2=-10^{-5}$ Дж.

3.10. $A=k\frac{q^2}{a}(4+\sqrt{2})=4{,}9\cdot10^{-5}$ Дж.

3.11. $a=k\frac{5e^2}{m_p(v_1+v_2)^2}=4\cdot10^{-12}$ м.

3.12. $v_\alpha=\frac{\sqrt{k}\,e}{\sqrt{10am_p}}=3{,}7\cdot10^3$ м/с, $v_p=4v_\alpha=1{,}5\cdot10^4$ м/с.

3.13. $v=q\sqrt{\frac{k}{ma}}=4\cdot10^{-2}$ м/с.

3.14. $v=\frac{q}{2}\sqrt{\frac{k(4+\sqrt{2})}{ma}}=2\cdot10^{-2}$ м/с.

3.15. $\varphi=\varphi_0\left(1-\frac{r}{R}\right)$, $\varphi_R=0$, $\varphi=200$ В.

3.16. $\Delta q=\frac{r_1^2r_2Q}{(r_1+r_2)(Rr_2-r_1r_2+Rr_1)}=2\cdot10^{-9}$ Кл.

3.17. $C=\frac{rl}{2k(l-r)}=1{,}2$ пФ.

3.18. $q=CU=2\cdot10^{-4}$ Кл.

3.19. $\Delta\varphi=\frac{C_1\Delta\varphi_1+C_2\Delta\varphi_2}{C_1+C_2}=40$ В.

3.20. $q_1=\frac{2\varepsilon C_0U_0}{1+\varepsilon}=3{,}5\cdot10^{-4}$ Кл, $q_2=\frac{2C_0U_0}{1+\varepsilon}=0{,}5\cdot10^{-4}$ Кл, $U=\frac{2U_0}{1+\varepsilon}=50$ В, $W=\frac{2U_0^2C_0}{1+\varepsilon}=10^{-2}$ Дж.

3.21. $W=\frac{C_0U_0^2}{6}=3\cdot10^{-2}$ Дж.

3.22. $W=\frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}\frac{q_0^2}{2C_0}=1{,}25\cdot10^{-2}$ Дж, $U=\frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}\frac{q_0}{C_0}=250$ В.

3.23. $A=\frac{C\mathscr{E}^2}{4}=2{,}5\cdot10^{-9}$ Дж.

3.24. $A=\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon}C\mathscr{E}^2=1{,}8\cdot10^{-5}$ Дж.

3.25. $q_1=C_1\frac{(\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2)R+\mathscr{E}_1r}{R+r}=1{,}1\cdot10^{-5}$ Кл, $q_2=C_2\frac{\mathscr{E}_2R}{R+r}=$ $=2{,}5\cdot10^{-5}$ Кл.

3.26. $U_1=\frac{C_2}{C_1+C_2}\frac{(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1)R_2+\mathscr{E}_2R_1}{R_1+R_2}=5{,}25$ В, $U_2=\frac{C_1}{C_1+C_2}\frac{(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1)R_2+\mathscr{E}_2R_1}{R_1+R_2}=1{,}75$ В.

3.27. $q=\mathscr{E}CR\left(\frac{1}{2R+r}+\frac{1}{2R+3r}\right)=3{,}4\cdot10^{-3}$ Кл.

3.28. $q_1=\mathscr{E}C_1\frac{C_2(R_1+R_2)+C_3R_1}{(C_1+C_2+C_3)(R_1+R_2)}=7\cdot10^{-5}$ Кл,

$q_2=\mathscr{E}C_2\frac{C_2(R_1+R_2)+C_3R_2}{(C_1+C_2+C_3)(R_1+R_2)}=1{,}5\cdot10^{-4}$ Кл,

$q_3=\mathscr{E}C_3\frac{C_2R_2-C_1R_1}{(C_1+C_2+C_3)(R_1+R_2)}=8\cdot10^{-5}$ Кл.

3.29. $q=\dfrac{2Cr(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2)}{2r+R}=2\cdot10^{-7}$ Кл.

3.30. $U_1=\dfrac{C_2}{C_1+C_2}(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1)=3$ В, $U_2=\dfrac{C_1}{C_1+C_2}(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1)=2$ В.

3.31. $U=\dfrac{3\mathscr{E}R_0}{3R_0+4r}=15$ В.

3.32. $U_2=(I_1-I_2)\dfrac{U_1}{I_1}=0{,}1$ В.

3.33. $r_1=\dfrac{\mathscr{E}_1}{I}=1{,}5$ Ом, $r_2=\dfrac{\mathscr{E}_2}{I}=3$ Ом.

3.34. $I=\dfrac{\mathscr{E}_1}{r_1}-\dfrac{\mathscr{E}_2}{r_2}=0{,}05$ А.

3.35. $I_A=\dfrac{\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1}{2r}=0{,}4$ А.

3.36. $\Delta Q=\left(\dfrac{n_1}{n_2}-1\right)\dfrac{\rho mlI}{kS}=-1{,}5\cdot10^4$ Дж.

3.37. $R=\dfrac{\eta(r+r_1)}{1-\eta}=9{,}5$ кОм.

3.38. $P_1=\dfrac{4P_{01}(P_{02}+P_{03})^2}{(P_{01}+P_{02}+P_{03})^2}=72$ Вт, $P_2=\dfrac{4P_{01}^2P_{02}}{(P_{01}+P_{02}+P_{03})^2}=16$ Вт,
$P_3=\dfrac{4P_{01}^2P_{03}}{(P_{01}+P_{02}+P_{03})^2}=32$ Вт.

3.39. $x=\dfrac{(1-n)Ir}{Ir-n\mathscr{E}}=20.$

3.40. $P_м=\dfrac{N}{\eta}\left(1-\eta-\dfrac{NR}{\eta U^2}\right)=125$ Вт.

3.41. $I=\dfrac{m\sqrt{2as}\,(a+g(\alpha+k))}{\eta U}=305$ А.

3.42. $\eta=\dfrac{\mathscr{E}_0^2P_0}{4r}=50\%.$

3.43. $t=\dfrac{cdS^2\Delta T}{I^2\rho t_0 f}=20$ с.

3.44. $\eta=\dfrac{P}{(U+Ir)I}=0{,}02\%.$

3.45. $h=\dfrac{2\pi m}{eB}v\cos\alpha=9\cdot10^{-2}$ мм.

3.46. $\Delta\nu=\pm\dfrac{Be}{4\pi m}=\pm1{,}4\cdot10^{10}$ с$^{-1}$.

3.47. $E=\dfrac{eB^2s}{2\pi^2mn^2}=10^5$ В/м.

3.48. $\left(\dfrac{\Delta B}{\Delta t}\right)_{\max}=\dfrac{\mathscr{E}_{\max}}{nS\cos\alpha}=2{,}5$ Тл/с.

3.49. $\mathscr{E}_{\max}=2\pi fnBS=63$ В.

3.50. $q=\dfrac{BrS}{2\rho}=2{,}8\cdot10^{-3}$ Кл.

3.51. $A=\mathscr{E}It\left(1-\dfrac{I}{I_0}\right)=8$ Дж.

3.52. $n=\dfrac{(\mathscr{E}-Ir)I}{2\pi amg}=10$ с$^{-1}$, $\mathscr{E}_{инд}=\mathscr{E}-Ir=0{,}78$ В.

3.53. $\mathscr{E}_{инд}=\dfrac{1}{4\pi^2\nu^2C}\dfrac{\Delta I}{\Delta t}=0{,}25$ В.

4.1. $c_1=\dfrac{c\sin\beta}{\sin\alpha}\approx2\cdot10^8$ м/с.

4.2. $\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha_0-\dfrac{1}{n\sin\alpha_0}\approx36°30'.$

4.3. $l=\dfrac{a\sin2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\approx0{,}81$ см.

4.4. $\varphi=2\operatorname{arcctg}n\approx67°20'.$

4.5. $\gamma=90°+\arcsin(n\sin\varphi)\approx138°40'.$

4.6. $S'S''=2a(n-1)\varphi\approx1$ см.

4.7. $l\approx(a+d)/\varphi(n-1)=114$ см.

4.8. Луч из жидкости не выйдет.

4.9. $n_1=\dfrac{1}{\sin\alpha}\approx1{,}2.$

4.10. $\gamma=180°-(\alpha+\beta)=75°.$

4.11. $\gamma=\arcsin(\sqrt{2}\sin15°)\approx21°30'.$

4.12. $\beta=\arcsin(n\sin\alpha)$, $\beta_1\approx57°$, во втором случае луч не выйдет из грани AC.

4.13. $l\approx n3R\cos\alpha\approx39$ см.

4.14. $d=\dfrac{s}{\operatorname{tg}\alpha-\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}}\approx3{,}5$ см.

4.15. $l=dn^2/\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}\approx5{,}51$ см.

4.16. $R=\dfrac{H}{\sqrt{n^2-1}}\approx17$ см.

4.17. $F=\dfrac{d\Gamma}{\Gamma+1}=30$ см, $F=\dfrac{d\Gamma}{\Gamma-1}=60$ см.

4.18. $d=\dfrac{\Gamma+1}{\Gamma D}=7{,}5$ см, изображение действительное,
$d=\dfrac{\Gamma-1}{\Gamma D}=2{,}5$ см, изображение мнимое.

4.19. $F=\dfrac{L^2-l^2}{4L}=23{,}8$ см.

4.20. $h=\sqrt{h_1h_2}=12$ см.

4.21. $D=\dfrac{(\Gamma+1)^2}{\Gamma L}=1{,}25$ дптр.

4.22. $B_1A_1=\dfrac{Fl}{2(2F+l)}=2$ см, $B_2A_2=\dfrac{F}{2}=6$ см.

4.23. $F=\dfrac{2f_1f_2}{f_1+f_2}=32$ см, $\Gamma_1=\dfrac{f_1-f_2}{2f_2}=1{,}5$, $\Gamma_2=\dfrac{f_1-f_2}{2f_1}=0{,}375$.

4.24. Источник необходимо передвинуть на 8 см перпендикулярно оптической оси линзы в направлении, противоположном направлению смещения самой линзы.

4.25. $\tau=2\sqrt{\dfrac{v_0^2}{g^2}-\dfrac{2}{gD}}\approx 1{,}6$ с.

4.26. $\Gamma=\dfrac{1}{3}$.

4.27. $d=10F=50$ см.

4.28. $D=\dfrac{d_1-d_0}{d_1d_0}+\dfrac{d_2-d_0}{d_2d_0}=5$ дптр.

4.29. $n_1=\dfrac{\Gamma_1-1}{D_0D}=4$, $n_2=\dfrac{\Gamma}{D_0D}=6$.

4.30. $l=\dfrac{F_1^2d^2}{(d-F_1)[(F_2-F_1)d-F_1F_2]}=62{,}5$ см.

4.31. $l=\dfrac{1}{2}F=25$ см.

4.32. $t=\sqrt{\dfrac{2F(n-1)}{a}}=0{,}5$ с.

4.33. $F_1=R\dfrac{n_2}{2n-n_1-n_2}=48$ см, $F_2=R\dfrac{n_1}{2n-n_1-n_2}=39$ см.

4.34. $F_1=R\dfrac{n_1}{2n-n_1-1}\approx 13{,}3$ см, $F_2=R\dfrac{1}{2n-n_1-1}=10$ см.

4.35. Три мнимых изображения. $f=\dfrac{F}{2}$, $f_1=\dfrac{9}{11}F$, $d_1=4{,}5F$.

4.36. $\Gamma=\dfrac{F_{\text{об}}}{F_{\text{ок}}}=12{,}5$.

4.37. $\Gamma=\dfrac{F_{\text{об}}}{F_{\text{ок}}}=16$.

4.38. $x=\dfrac{F_{\text{об}}^2}{d-F_{\text{об}}}=2$ см.

4.39. $\delta=\gamma_1\dfrac{F_1F_2}{l-F_1-F_2}\approx 7\cdot 10^{-7}$ м.

4.40. $s=F$.

4.41. $F=\dfrac{R_1R_2}{(2n_1-n_2-1)(R_2-R_1)}\approx 90$ см.

4.42. $\Delta n=\dfrac{l}{\alpha F}\approx 0{,}016$.

4.43. $\Delta n_2=(n_{1\text{с}}-n_{1\text{к}})\dfrac{R_2}{R_1}=0{,}04$.

4.44. $\dfrac{hc}{\lambda_1}=6\cdot 10^{-19}$ Дж, $\dfrac{hc}{\lambda_2}=9{,}9\cdot 10^{-19}$ Дж. Фотоэффект наблюдается.

4.45. $\lambda_{\text{кр}}=\dfrac{hc}{A}\approx 540$ нм.

4.46. $h=\dfrac{e(U_1-U_2)}{\nu_1-\nu_2}\approx 6{,}6\cdot 10^{-34}$ Дж·с.

4.47. $h=\dfrac{e}{c}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(U_1-U_2)\approx 6{,}61\cdot 10^{-34}$ Дж·с,

$\lambda_{\text{кр}}=\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1U_1-\lambda_2U_2}(U_1-U_2)\approx 0{,}65$ мкм.

4.48. $I=\dfrac{eN\lambda_{\text{кр}}}{eU\lambda_{\text{кр}}+hc}=0{,}5$ мА.

4.49. $n=\dfrac{(hc-A\lambda)\,4\pi\varepsilon_0R}{e^2\lambda}=2{,}75\cdot 10^7$ электронов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ЕФАШКИН ГЕННАДИЙ ВИКТОРОВИЧ
РОМАНОВСКАЯ НАТАЛЬЯ НИКОЛАЕВНА
ТАРАСОВА АЛЬДИНА НИКОЛАЕВНА

УЧИТЕСЬ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

Зав. редакцией *Н. В. Хрусталь*
Редактор *Г. Н. Федина*
Младший редактор *Л. А. Крикунова*
Художники *В. А. Ульяненкова, Ю. В. Пахомов*
Художественный редактор *О. В. Попович*
Технический редактор *М. В. Коновалова*
Корректор *Т. А. Казанская*

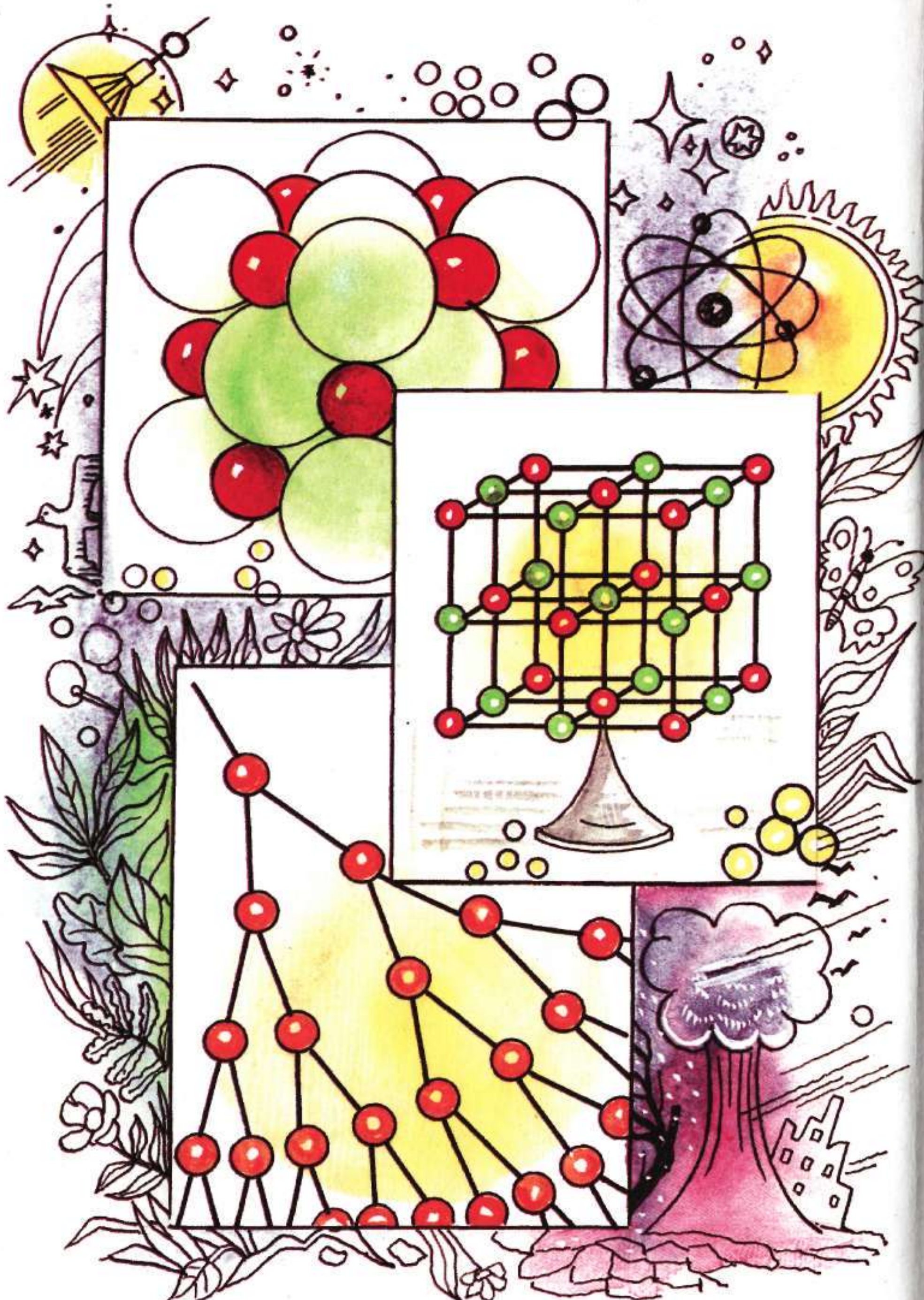
ИБ № 16590

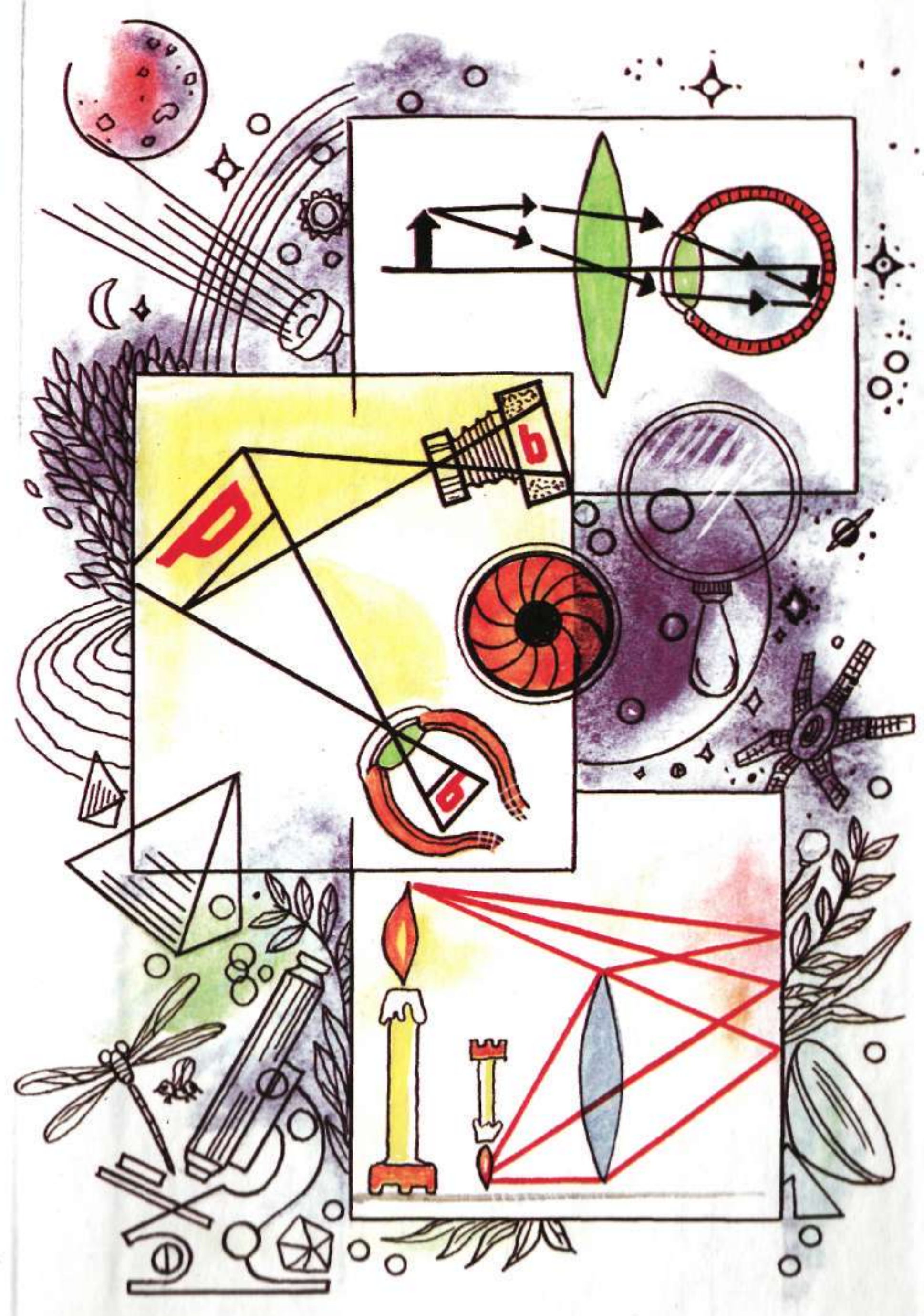
Изд. лиц. № 010001 от 10.10.91 г.
Сдано в набор 5.09.96. Подп. в печ. 07.02.97. Формат изд. $60\times90^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 15.00. Печать офсетная. Тираж 20 000 экз. Заказ 227.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Комитета Российской Федерации по печати. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

«Учебная литература». 117571, Москва, проспект Вернадского, 88. Московский педагогический государственный университет, тел. 437-46-97, 932-56-21, 437-11-11.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Комитета Российской Федерации по печати. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.





Вы хотите научиться решать задачи по физике?

В этой книге на примере решения задач показано, как надо начинать решать задачи, как выяснять рассматриваемую ситуацию, как пользоваться теми или иными закономерностями для составления математических соотношений при решении задач по физике.

Указания перед решениями помогут вам самим начать решать задачи.